Министерство образования Российской Федерации
ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Дмитриевский М.В.

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОЛЕЙ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ.

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
Кутрунов В.Н.

Тюмень 2003

Оглавление

Введение.

Диссертационная работа посвящена разработке новых и оптимизации существующих алгоритмов построения карт геолого-геофизических параметров. Работа состоит из трех глав, заключения, трех приложений и списка литературы.

В первой главе дана классификация основных типов исходных данных, встречающихся в задачах восстановления (построения) двумерных полей геолого-геофизических параметров. Результатом такого построения является карта параметра, представленная в изолиниях. Классификация исходных данных проведена по двум критериям - по степени достоверности и по способу их задания. Рассмотрены наиболее часто используемые методы построения карт, заключающиеся в пересчете исходных данных на равномерную сетку (*гридинг*). Описаны основные математические проблемы, которые приходится решать при построении полей и их визуализации. Фактически первая глава является обзором литературы, кроме того отдельные аспекты, связанные с обзором литературы, встречаются также в других главах. При исследовании темы диссертации проработано 92 источника литературы, из них 28 - зарубежных.

Вторая глава диссертации посвящена новым методам обработки геологической и геофизической информации. Глава состоит из нескольких частей. Первая часть посвящена построению "метода последовательной минимизации функционалов" (ПМФ) - предлагается способ последовательного учета исходных данных различной природы по уровню их достоверности. При конструировании этого метода обосновывается выбор простейшей с вычислительной точки зрения базисной функции «ступенька», позволяющей достигнуть высокой производительности и эффективного использования памяти предлагаемым алгоритмом, описывается алгоритм составления систем алгебраических уравнений метода ПМФ.

Для решения разреженных алгебраических систем большой размерности во второй части предлагается *итерационный метод блуждания по спектру (МБС)*, способный учитывать априорную информацию о спектре матричного оператора, заданной в виде интервалов, в которых могут находиться точки спектра. В работе предложен многосеточный итерационный алгоритм, учитывающий существенную особенность построения матриц метода ПМФ, заключающуюся в том, что все они строятся из минимизации определенной последовательности функционалов, что, в результате, дает высокую скорость сходимости итерационного процесса.

В §2.5 приведены результаты работы метода ПМФ по построению различных карт геологических и геофизических параметров. Метод ПМФ сравнивался с различными алгоритмами гридинга, реализованных в профессиональных пакетах, предназначенных для построения карт (Surfer 7.0, General Mapping Tools (GMT), Irap RMS, Baspro). Результаты экспериментов показали, что предлагаемый метод ПМФ обладает наилучшим быстродействием - время работы метода более чем в 2 раза меньше наилучшего времени, показанного программой GMT. Качество карт, полученных в результате работы метода ПМФ сопоставимо с картами, получаемыми программами Surfer и GMT, и значительно выше, чем карты, полученные при помощи программ Irap RMS и Baspro. Дополнительно приведена часть результатов построения карт по Токскому месторождению с использованием метода ПМФ. Благодаря высокой производительности полученной реализации метода ПМФ, он был применен для построения топографической карты земной поверхности. Некоторые результаты этой работы приведены в диссертации.

Завершает вторую главу схема численной оптимизации широко применяемого для построения геологических и геофизических карт метода *крайгинга*. Дана новая трактовка этого метода с детерминистических позиций и разработан новый интерполяционный метод, названный *аналогом метода крайгинга*.

В третьей главе рассматривается проблема визуализации полей (карт) геолого-геофизических параметров на компьютере. Кратко рассмотрены классические подходы к решению этой проблемы. Описывается техника вейвлет-анализа, по всей видимости впервые примененная для обработки карт геолого-геофизических параметров: в результате появилась возможность быстро пересчитывать карты с одного уровня детальности на другой, убирая несущественные или добавляя недостающие "детали". При этом обосновывается построение карт с избыточной равномерной сеткой, что дополнительно позволяет бороться с погрешностями в исходных данных.

В первой части приложения впервые проведена классификация основных современных методов картопостроения по типам возникающих матричных операторов (плотные, разреженные, симметричные, положительно или условно определенные матрицы), дано краткое описание алгоритмов. Во второй части приложения описываются методы конструирования матриц, обладающих заданными спектральными и другими характеристиками. Методы конструирования матриц, обладающих заданными свойствами известны в литературе, однако в данной работе они собраны в единую логическую схему, рассмотрены с позиций конструирования тестов. Такой подход представляет методический интерес. Задача построения матриц с заданными спектральными свойствами часто возникает при тестировании итерационных методов, учитывающих ту или иную априорно известную информацию о спектре матрицы. Третья часть содержит описание двух итерационных алгоритмов решения алгебраических систем уравнений : итерационный метод полинома наилучшего равномерного приближения (ПНП) и итерационный метод полинома наилучшего равномерного приближения на комплексном спектре. Оба метода способны учитывать априорную информацию о спектре, заданную для метода ПНП в виде отрезка, а для ПНП на комплексном спектре - в виде круга, в котором могут находится точки спектра.

Отдельные фрагменты разработок, представленных в диссертации внедрены в программный комплекс «БАСПРО» (ЗАО "Информационная компания", г. Тюмень). Автором диссертации создан самостоятельный программный продукт Surface Fitter (surfit), реализующий метод ПМФ и алгоритмы, использующие технику вейвлет-анализа (работа с картой с различными уровнями детальности, подавление шумов). Программный продукт может быть использован специалистами для построения и визуализации высокодетальных карт различных геолого-геофизических параметров. Программа способна эффективно обрабатывать большое количество исходной информации различной природы (данные в скважинах, результаты сейсмических исследований, априорные сведения). Программный продукт свободно распространяется и доступен через интернет по адресу `http:\\surfit.sourceforge.net`. Работа выполнена при поддержке гранта губернатора Тюменской области №111-01.

1. Классические способы обработки полей геологических и геофизических параметров для построения цифровых моделей нефтяных месторождений.

1.1. Классификация геологических и геофизических данных по степени их достоверности.

При описании месторождений нефти и газа, строят математические модели, описывающие свойства геологических пластов, поведение их различных параметров. Самый распространенный и наглядный способ представления таких моделей связан с построением карт.

В основе построения каждой карты лежит определенный набор исходных данных, в общем случае которые можно разделить на две категории:

1. **Данные, полученные эмпирическим путем**. К ним относятся данные, полученные из скважин при помощи различных инструментов, таких как колонковые долота для отбора керна, пластовые пробоотборники и опробователи пластов, различные геофизические зонды, инклинометры, глубинные манометры, дебитомеры, лабораторные установки для определения геолого-физических свойств пород и физико-химических свойств флюидов. Изучение керна, шлама, проб нефти, газа и воды в лабораториях с помощью специальных приборов - основной источник прямой информации о геолого-физических свойствах пород и физико-химических свойствах углеводородного сырья и пластовой воды.

2. **Данные, полученные при помощи моделирования**. К этому типу данных относятся данные, полученные из изучения параметров искусственных моделей пластов и протекающих в них процессов. Также к таким данным относятся т.н. "аналоги" - хорошо изученные залежи или их участки и протекающие в них процессы или явления.

Наиболее достоверными считаются данные, относящиеся к первому типу, т.е. данные, полученные эмпирическим путем. Менее достоверными считаются данные, полученные в результате применения различных моделей процессов, протекающих в пласте к реальному пласту, т.к. определить степень достоверности модели часто не представляется возможным.

Классификация исходных данных по степени их достоверности необходима для адекватного учета этих данных при построении карт - математических моделей, описывающих геологические пласты. Понятно, что при построении карт геолого-геофизических параметров наиболее достоверные данные должны иметь "больший вклад", нежели менее достоверные.

Для классификации исходных данных по степени их достоверности рассмотрим рис. 1.1. В прямоугольниках, обозначенных пунктирной линией описываются исходные данные, служащие для построения карты того или иного геолого-геофизического параметра. Исходные данные описываются по мере убывания их достоверности и информационной значимости. Рассмотрим более подробно исходные данные, участвующие в построении каждой карты.

- **Карта поверхности водо-нефтяного контакта.**

  Основной исходной информацией при построении карты поверхности водонефтяного контакта (ВНК), являются абсолютные отметки водонефтяного контакта, замеренные в скважинах.

  Абсолютная отметка H поверхности в точке наблюдения определяется по формуле
  $$H = L - (A + \Delta L),$$
  где A - альтитуда устья скважины, L - глубина, на которой ствол скважины пересекает исследуемую поверхность, ΔL - удлинение ствола скважины за счет искривления.

  К данным, той же достоверности, что и результаты замеров в скважинах, исследователь может относить точки с фиктивными значениями в тех случаях, когда экспериментальных точек недостаточно для построения карты. Фиктивные точки - это дополнительные к экспериментальным точки, заданные исследователем из каких-либо более или менее правдоподобных соображений и которые исследователь считает данными той же достоверности, что и экспериментальные точки.

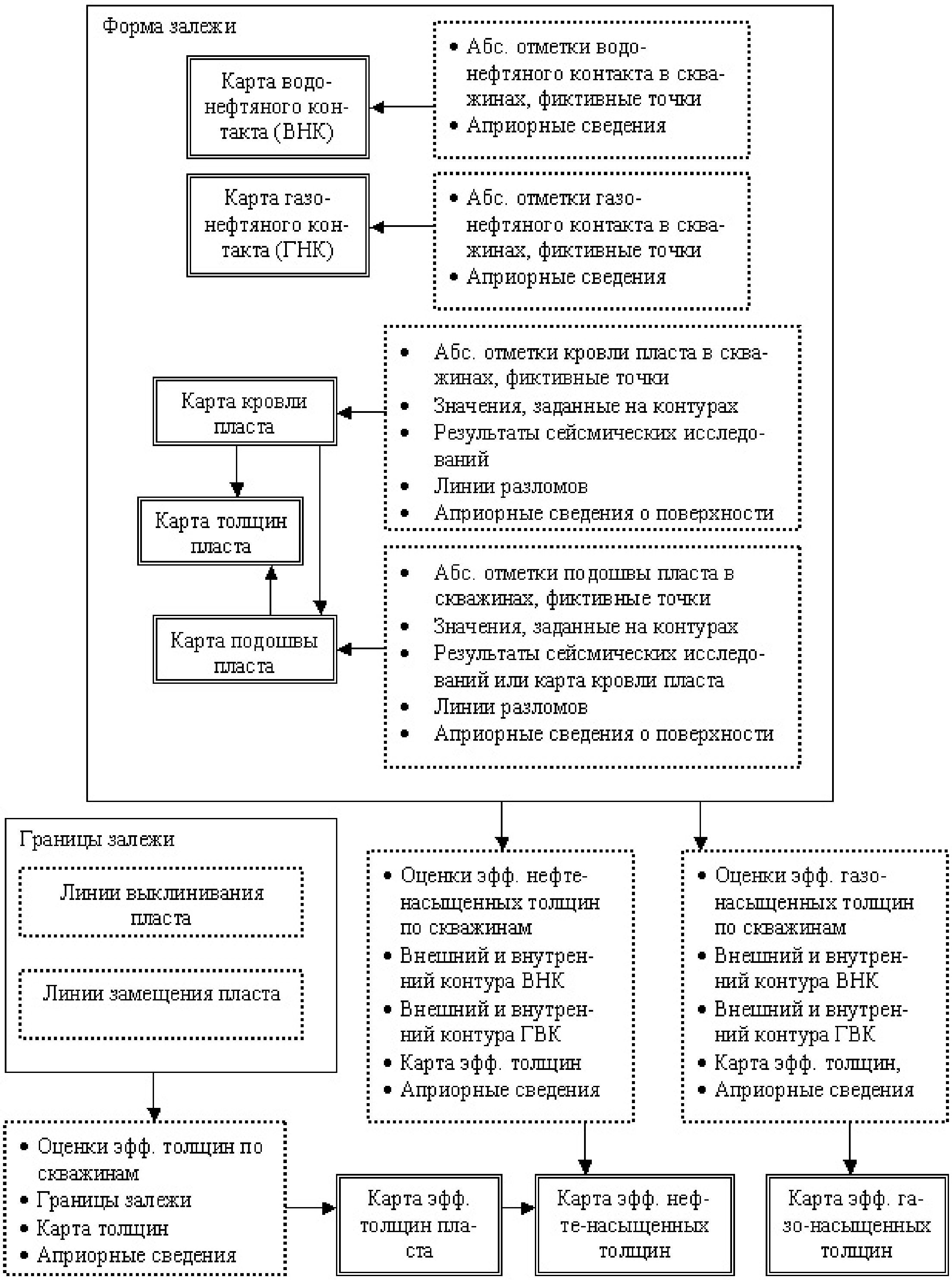

Форма залежи
Карта водо-нефтяного контакта (ВНК)
• Абс. отметки водо-нефтяного контакта в скважинах, фиктивные точки
• Априорные сведения
Карта газо-нефтяного контакта (ГНК)
• Абс. отметки газо-нефтяного контакта в скважинах, фиктивные точки
• Априорные сведения
Карта кровли пласта
• Абс. отметки кровли пласта в скважинах, фиктивные точки
• Значения, заданные на контурах
• Результаты сейсмических исследований
• Линии разломов
• Априорные сведения о поверхности
Карта толщин пласта
Карта подошвы пласта
• Абс. отметки подошвы пласта в скважинах, фиктивные точки
• Значения, заданные на контурах
• Результаты сейсмических исследований или карта кровли пласта
• Линии разломов
• Априорные сведения о поверхности
Границы залежи
Линии выклинивания пласта
Линии замещения пласта
• Оценки эфф. нефте-насыщенных толщин по скважинам
• Внешний и внутренний контура ВНК
• Внешний и внутренний контура ГВК
• Карта эфф. толщин
• Априорные сведения
• Оценки эфф. газо-насыщенных толщин по скважинам
• Внешний и внутренний контура ВНК
• Внешний и внутренний контура ГВК
• Карта эфф. толщин,
• Априорные сведения
• Оценки эфф. толщин по скважинам
• Границы залежи
• Карта толщин
• Априорные сведения
Карта эфф. толщин пласта
Карта эфф. нефте-насыщенных толщин
Карта эфф. газо-насыщенных толщин

Рис. 1.1.

Для задания поведения поверхности в областях низкой плотности информации, помимо данных в скважинах, могут использоваться различные предположения о положении поверхности ВНК, например то, что поверхность мало отличается от константы в пределах залежи. Также могут использоваться и различные интуитивные представления о поведении поверхности, которые задаются в виде тренда - поверхности, грубо описывающей форму поверхности ВНК.

- **Карта поверхности газо-нефтяного контакта (ГНК).**

  Здесь ситуация аналогична построению карты ВНК, с той лишь разницей, что в скважинах замеряются абсолютные отметки газонефтяного контакта.

- **Карта поверхности кровли пласта (структурная карта).**

  Карты кровли и подошвы пласта описывают геометрическое место пласта в пространстве, описывают его форму. При построении карты кровли зачастую имеются только абсолютные отметки кровли пласта, замеренные в скважинах. Эти данные являются наиболее достоверными, т.к. получены эмпирическим путем. Как и в случае карт ВНК и ГНК, при построении структурных карт могут применяться фиктивные точки.

  В случаях, когда структурная карта строится с учетом ранее построенной карты, представленной в изолиниях, в качестве исходных данных могут быть заданы эти изолинии как пространственные кривые с заданными на них значениями. Эти данные будем считать менее достоверными, нежели замеры, произведенные в скважинах и заданные в фиктивных точках. Структурная карта, построенная раннее и представленная в виде изолиний может доуточняться новыми данными, полученными в результате проведенных исследований вновь пробуренных скважин.

  В дополнение к скважинным данным могут быть предоставлены результаты сейсмических исследований, представленные в форме *грида* (прямоугольная равномерная сетка, с заданными в узлах значениями). Этот грид отражает характерные наклоны, которые имеет картируемая поверхность и также должен учитываться при построении карты. Картируемая поверхность, рассчитанная с использованием "сейсмического" грида должна удовлетворять двум требованиям: во-первых наиболее точно аппроксимировать замеры абсолютных отметок, произведенных в скважинах (это обеспечивает приоритет скважинных данных над данными, полученными в результате сейсмических исследований). Во-вторых, по возможности наиболее точно повторять форму поверхности, полученной в результате сейсмических исследований.

При построении структурных карт могут задаваться линии разломов, или, как их еще называют - линии структурных нарушений. Линии разломов - это линии, вдоль которых произошло смещение геологического пласта. Информация о линиях разломов может быть двух типов: в первом случае о разломе известно только его геометрическое место на карте, во втором - на разломе задаются относительные смещения пласта. Информация о расположении линий разломов получаются несколькими способами: из анализа структурных карт кровли и подошвы пласта, построенных без учета разломов, из анализа геологических разрезов, построенных по соседним скважинам. Еще один способ - анализ "сейсмической" карты. Исходя из способов получения информации о линиях разлома, отнесем их к менее достоверной информации, нежели результаты исследования скважин и результаты сейсмических исследований.

При построении структурных карт (и карт других параметров) существуют области с низкой плотностью информации. О поведении картируемого параметра в этих областях могут иметься различные априорные сведения и предположения. Способов учета такого рода информации великое множество - от построения адаптированной сетки, по которой в дальнейшем будет строиться карта, до записи этих сведений в математической форме в виде функционалов. Эти сведения считаются наименее достоверными и должны учитываться в последнюю очередь. При построении структурных карт в качестве таких априорных знаний можно предполагать, что картируемая поверхность мало отличается от некоторой константы или плоскости. Тем самым предполагается, что в период формирования залежи структурная поверхность имела форму некоторой плоскости, которая была деформирована за длительное время существования этой залежи. Иногда используют предположение о том, что поверхность напоминает "купол".

- **Карта поверхности подошвы пласта.**

  Построение карты подошвы пласта аналогично построению карты кровли. Отличие может заключаться в том, что карту кровли зачастую используют в качестве вспомогательных данных при построении карты подошвы. Достоверность карты кровли и способ ее учета, такой же, как был описан для результатов сейсмических исследований.

- **Карта общих толщин пласта.**

  Карта общих толщин пласта строится как разница карт подошвы и кровли пласта.

- **Карта эффективных толщин пласта.**

  Основной информацией, используемой при построении карты эффективных толщин пласта являются оценки эффективных толщин, полученные из анализа информации по скважинам. Значение эффективной толщины получается суммированием толщин всех пород-коллекторов, вскрытых скважиной, т.е. пород, обладающих такими геолого-физическими свойствами, которые обеспечивают физическую подвижность нефти, газа или воды в пустотном пространстве породы.

  Помимо оценок параметра в скважинах, также используются данные о границах залежи, которые определяются линиями выклинивания и замещения коллекторских свойств пласта. При выклинивании продуктивных отложений образуются линии выклинивания, за пределами которых эффективные толщины равны нулю. Потерю пластом коллекторских свойств, при сохранении его толщины называют замещением коллекторов, а соответствующую экранирующую границу - линией замещения коллекторов.

  Положение линий замещения и выклинивания определяют по данным керна, промысловой геофизики и опробования о том, какими породами представлен пласт в каждой скважине. Т.к. линии замещения и выклинивания есть результат применения некоторого алгоритма к тем же скважинным данным, то их положение определяется с погрешностью. Поэтому информацию, которую несут линии выклинивания и замещения о строении залежи, будем считать менее достоверной по сравнению с информацией, полученной по скважинам.

Дополнительным ограничением на карту эффективных толщин является построенная ранее карта общих толщин - эффективные толщины не должны превышать общих толщин.

При построении карт эффективных толщин могут использоваться различные априорные сведения. Например, эти сведения могут быть описаны трендом, представленным в виде грида. Тренд в данном случае описывает характер изменения эффективных толщин в областях низкой плотности информации.

- **Карты эффективных нефте, газо и водонасыщенных толщин пласта.**

  Для пород-коллекторов обычно рассматривают три вида насыщения - нефть, газ и вода. Построение карт эффективных нефте, газо и водонасыщенных толщин схоже, поэтому в дальнейшем будем рассматривать задачу построения карты эффективных нефтенасыщенных толщин.

  При расчете карты эффективных нефтенасыщенных толщин пласта используются оценки соответствующих толщин, произведенные по результатам опробования скважин. Совместно с основной информацией для картопостроения, полученной "из скважин", используются:

  - ◇ Внешние контуры ВНК, полученные пересечением поверхности ВНК с кровлей пласта.
  - ◇ Внутренние контуры ВНК, полученные пересечением поверхности ВНК с подошвой пласта.
  - ◇ Внешние и внутренние контуры ГНК, полученные аналогичным пересечением поверхности ГНК со структурными поверхностями.
  - ◇ Карта эффективных толщин.
  - ◇ Априорные сведения, заданные в виде тренда.

  Внешние и внутренние контура ВНК разделяют залежь на три зоны: чисто-нефтяную (ЧНЗ), водонефтяную (ВНЗ), и водонасыщенную зоны. Построение карты в каждой зоне можно выделить в отдельную задачу: значения эффективных нефтенасыщенных толщин в чисто-нефтяной зоне должны совпадать со значениями эффективных толщин, а в водонасыщенной зоне должны равняться нулю. В водонефтяной зоне карта строится с учетом следующих ограничений, приведенных в порядке уменьшения достоверности:

- ◇ Значения нефтенасыщенной толщины, оцененные в скважинах.
- ◇ Значения нефтенасыщенной толщины, полученные на внутренних контурах ВНК - они должны равняться значениям эффективных толщин.
- ◇ Значения нефтенасыщенной толщины, полученные на внешних контурах ВНК - они должны равняться нулю.
- ◇ Априорные сведения об изменении нефтенасыщенной толщины в области низкой плотности информации, заданные в виде тренда (грид).

Алгоритм построения карты эффективных нефтенасыщенных толщин наиболее сложный из всех алгоритмов построения карт, т.к. в нем используются всевозможные типы исходных данных. Эти данные имеют различную информационную значимость и заданы на различных носителях: точках, кривых, площадях.

Рис. 1.2.

- **Карты различных коэффициентов.**

  Построение карт различных коэффициентов очень схоже (см. рис. 1.2). В качестве исходных данных участвуют оценки картируемого коэффициента, произведенные по результатам исследования скважин. Т.к. часто в расчетах карту какого-либо коэффициента заменяют константой, то используется априорное предположение о том, что коэффициент мало отличается от константы. Обычно рассматриваются задачи построения следующих карт:

◇ Карта коэффициента пористости.

◇ Карта коэффициента проницаемости.

$$v = Q/F = (k_{\text{пр}}/\mu)(\Delta p/\Delta L),$$

◇ Карты коэффициентов нефте, газо и водонасыщенности.

В заключении отметим важность проведенной выше классификации исходных данных по степени достоверности. Основной проблемой при истолковании результатов построений, получающихся при применении различных методов гридинга, является определение той информации, которая была использована при картопостроении. Зачастую это сделать невозможно, или очень сложно - в зависимости от применяемого метода гридинга. Выбранный метод вносит в построение карты определенную информацию. В каком-то смысле ее можно считать исходной, т.к. вид карты будет зависеть от выбранного метода. Например, аппроксимации с помощью ступенчатых или гладких функций приведут к ступенчатой или гладкой поверхности. Подобного же рода информация закладывается при помощи построения адаптивной сетки, заданием весовых коэффициентов (значимости) для скважин.

В предлагаемом в §2.1 методе последовательной минимизации функционалов (ПМФ) вся исходная информация записывается в явной математической форме - в виде функционалов. Этот подход позволяет четко определиться с тем, на основе какой информации будет построена карта. В случае, если карта не удовлетворяет требованиям исследователя, необходимо выявить ту информацию, которая не была учтена при построении карты и, записав ее в виде функционала, включить в расчет. Приведенная классификация исходных данных используется в методе ПМФ для задания приоритета для каждого типа входной информации: сперва учитываются самые достоверные данные (обычно это результаты замеров в скважинах), затем следует менее достоверная информация (значения, заданные на контурах, тренды, априорная информация).

1.2. Классификация данных по равномерному или неравномерному, непрерывному или дискретному способам задания.

Данные, которые используются методами картопостроения помимо различной информационной значимости могут быть заданы различными способами: в виде точек, контуров, поверхностей, в виде аналитических функций и т.д. Рассмотрим различные способы задания информации более подробно.

1. **Данные, задаваемые дискретно.**

   - *Набор неравномерно расположенных точек.*

     ◇ Каждая точка задается ее координатами и значением, соответствующим этой точке: $\{(x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, \ldots, N\}$. К этим данным относятся: оценки картируемого параметра по скважинам, фиктивные точки, добавленные пользователем.

     ◇ Для учета данных, заданных в виде контуров часто прибегают к следующему приему: каждый контур заменяется набором точек, полученных в результате дискретизации контура.

     ◇ Результаты сейсмических исследований могут задаваться в виде профилей, т.е. набором точек со значениями, расположенных вдоль пересекающихся линий. Эти точки также можно считать заданными неравномерно.

   - *Набор равномерно расположенных точек.*

     Набором равномерно расположенных точек чаще всего задаются вспомогательные поверхности (карты), рассчитанные на равномерной сетке. Эти равномерно расположенные точки представляют собой узлы равномерной сетки с заданными в них значениями (грид).

2. **Данные, задаваемые непрерывно на кривых и отрезках.**

   - *Данные, задаваемые ломаными кривыми.*

     Ломанные кривые задаются набором отрезков. Каждый i-й отрезок A_iB_i задается двумя точками $A_i(x_A, y_A)$ и $B_i(x_B, y_B)$. Т.к. ломанная линия непрерывна, то $B_i = A_{i-1}$. Для каждой точки A_i и B_i задаются значения $z(A_i)$ и $z(B_i)$.

     Ломаными линиями обычно задаются: линии разломов, контура водо-нефтяного и газо-нефтяного контактов, произвольные контура с заданными на них значениями, изолинии, полученные при помощи дигитайзера.

- *Данные, задаваемые на гладких кривых или других произвольных линиях.*

  Обычно это контура, нарисованные пользователем вручную при помощи "мышки". В процессе рисования контура автоматически сглаживаются. Для таких контуров применяют параметрическую форму задания:

  $$\begin{aligned} x_k &= x_k(s) \\ y_k &= y_k(s), \quad s = 0, S_k, \quad k = 1, \ldots, K \\ z_k &= z_k(s) \end{aligned}$$

  где S_k - длина k-ой кривой.

Один из наиболее распространенных способов задания функций $x_k(s), y_k(s), z_k(s)$ - это разложение их по базису B-сплайнов третьего порядка (Д. Роджерс, Дж. Адамс, 2001). Существует два способа учета таких контуров при построении карт (гридинге): дискретный и аналитический. При дискретном способе учета контуров они заменяются набором точек. При аналитическом способе уравнения, описывающие контур входят в различные математические выражения - интегралы, суммы и т.д. Например, для учета значений $z_k(s)$, заданных на контурах, может минимизироваться функционал

$$L = \sum_k \int \left(f(x_k(s), y_k(s)) - z_k(s)\right)^2 ds$$

3. **Данные, задаваемые по площадям.**

- *Аналитическая функция.* Вспомогательная поверхность (тренд) может быть задана в виде аналитической функции

  $$f = f(x, y).$$

  При использовании аналитической функции в алгоритмах гридинга, используются ее значения, вычисленные в узлах грида.

- *Интегральные функционалы.* В качестве ограничений на поверхность могут накладываться различные интегральные оценки, вычисленные по поверхности. Так, например, можно задать желаемое среднее значение, которым должна обладать поверхность.

- *Априорно известная косвенная информация.* В работе в качестве такой информации используется предположение о том, что в области низкой плотности информации поле мало отличается от константы или плоскости (§2.3.2). Помимо этого предположения можно задавать и другую информацию о поведении параметра в области низкой плотности исходных данных.

1.3. Основные известные типы обработки первоначальной геологической и геофизической информации для построения цифровых моделей нефтяных месторождений.

1.3.1. Пересчет данных на равномерную сетку (гридинг).

Современные методы разработки месторождений предполагают использование математических моделей, определяющих фильтрационные и емкостные свойства залежей нефти.

Как правило, это поля геолого-геофизических параметров, восстанавливаемые по:

1. отдельным замерам в скважинах;
2. дистанционным видам исследований (сейсморазведка)
3. некоторой априорной информации.

Один из основных наиболее емких и удобных способов представления, обработки и хранения геолого-геофизической информации связан с построением карт исследуемого параметра. Обычной является следующая постановка задачи: на некоторой площади в некотором количестве точек известны значения того или иного геологического или геофизического параметра. Как правило, сетка точек является нерегулярной и могут существовать подобласти, в которых данный параметр неизвестен. На исследуемой площади требуется построить линии уровня (изолинии) параметра с некоторым заданным шагом. Для построения изолиний, обычно предварительно рассчитывают значения картируемого признака на равномерной или триангулированной сетке.

Карты широко используются во многих научно-аналитических организациях Тюменской области (ТюменьНИИГеофизика, ЗапСибНИГНИ, СибНИИНП, СИБИНКОР, ТННЦ) для изучения месторождений (подсчет запасов, изучение энергетического состояния пластов и т.д.). Во многих из них применяются оригинальные методы построения карт, разрабатываются комплексы программ. Отправной точкой в изучении основных подходов создания карт геолого-геофизических параметров явился результат труда коллектива, работавшего в ЗапСибНИГНИ под руководством А.М. Волкова (А.М. Волков, 1988).

Стоимость бурения одной скважины является значительной и решение о выборе ее местоположения связано с решением задачи повышения экономической отдачи скважины, нежели с задачей изучения свойств объекта. Такая ситуация определяет неравномерный характер сети скважин: высокую плотность в центральной части месторождения и низкую в периферийной. Задача восстановления полей параметров определяет характерный для моделирования нефтяных месторождений класс задач - интерполяционное восстановление полей по нерегулярной сети скважин, в которых задаются граничные условия. В случае, если данные заданы со значительной погрешностью, применяются аппроксимационные методы. Дополнительно от методов восстановления геологических и геофизических полей требуется, чтобы исследователь имел возможность влиять на результат построения путем задания своего видения восстанавливаемого поля. Каждый метод предоставляет такую возможность по-своему: либо существует возможность управлять видом минимизируемого функционала, либо можно накладывать на результирующую поверхность некоторые дополнительные ограничения. Для увеличения достоверности карты также решаются задачи учета различных тектонических нарушений (разломов) и т.д.

Существует целое направление в конструировании методов, направленных на минимизацию некоторого функционала. Часто такой функционал состоит из нескольких слагаемых, каждое из которых входит в общую сумму с некоторым весом. Каждое слагаемое в таком функционале отвечает за учет какого-либо типа исходной информации: замеров параметра в скважинах, учет вспомогательных поверхностей и т.д. Например, в методах, предложенных А.М. Волковым в качестве одного из слагаемых функционала, используются различного рода стабилизаторы (например $||Df||^2_{L_2}$, где D - некий дифференциальный оператор, f - функция, получающаяся в результате минимизации функционала), которые обеспечивают тот или иной уровень сглаживания данных, или учет той или иной дополнительной информации о поведении параметра на изучаемой площади (А.М. Волков, 1988, В.И. Аронов, 1990, А.Г. Плавник и др., 2002). Так, например, для построения функции, аппроксимирующей исходные данные и обладающей достаточной гладкостью минимизируют функционал

$$L = ||Af - z||^2_{R^n} + \alpha||Df||^2_{L_2},$$

где A - это оператор, высчитывающий значения искомой функции f в точках исходных данных. Вектор z содержит исходные значения, заданные в этих точках.

В методах, подобных описанным выше, решение часто ищется в виде аналитической функции, которая представляется конечной суммой базисных функций с ограниченным носителем. В качестве таких базисных функций наибольшее распространение получили B-сплайны третьего порядка (А.М. Волков, 1988). Эти функции широко применяются не только в картопостроении, но также в задачах численного решения дифференциальных уравнений в частных производных (Л.В. Гилева, 2000), в задачах теории упругости (С.Ю. Катеринина, 2000). Подобные методы носят общее название - "метод конечных элементов". Эти методы очень часто используются для картопостроения в связи с тем, что позволяют решать задачи с большим количеством исходных данных, а соответствующие системы линейных уравнений получаются разреженными и легко решаются как итерационными, так и специальными прямыми методами (M. Hegland и др., 1997, M. Hegland и др., 1998, В.А. Василенко, 1986, В.А. Василенко, 1983, Н.С. Бахвалов и др., 1987, Г.И. Марчук, 1989, M.B. Gousie, Wm.R. Franklin, 2000, С.В. Горбачев, 2000).

Для задач с детальной сеткой, содержащей большое количество узлов, часто применяют многосеточные каскадные алгоритмы (Л.В. Гилева, 2000, W.-P. Tang, W. L. Wan, 2000, W. L. Wan и др., 2000, Н.С. Бахвалов и др., 1987). Их суть в следующем: сперва решение ищется на грубой сетке. Этот этап не составляет сложности с численной точки зрения. Полученное в результате приближенное решение используется для построения решения на более детальной сетке, содержащей уже большее количество узлов. Л.В. Гилевой (Л.В. Гилева, 2000) для решения алгебраических систем уравнений, возникающих в задачах конечно-элементной аппроксимации, предложен каскадный итерационный алгоритм нахождения численного решения эллиптических краевых задач, доказана его оптимальная вычислительная сложность. В данной диссертационной работе предложен новый итерационный процесс решения систем линейных уравнений метода последовательной минимизации функционалов большой размерности, учитывающий существенную особенность матриц этих систем уравнений - все они возникают из минимизации некоторой последовательности функционалов (§2.4.3).

Широкое распространение для решения задач интерполяции и аппроксимации функций двух переменных получили также методы сплайн-функций (S. Pruess, 1993, B.K. Bhattacharyya, 1969, David T. Sandwell, 1987, В.А. Василенко, 1986, Дж. Альберг и др., 1972, Г.И. Марчук, 1989, С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин, 1976). Несмотря на достаточно долгий период развития подобных методов, часто можно встретить работы чисто теоретического характера (М.В. Березовский, 2000). Так, например, Березовским М.В. (М.В. Березовский, 2000) введен новый класс сглаживающих сплайнов - изогеометрический сглаживающий сплайн, позволяющий учесть информацию о значениях приближаемой функции и ее производных не только в узлах сетки, но и на интервалах. Подобная проблема рассматривается и в работе (М.И. Игнатов, А.Б. Певный, 1986) - построение аппроксимационной поверхности, в некоторых точках которой даны ограничения на диапазон изменения функции. Учет значений, заданных на контурах (пространственных кривых) при аппроксимации кривых и поверхностей рассматривался в работах (В.Н. Пьянков, М.В. Дмитриевский, 2002, В.Н. Пьянков и др., 2002).

В большинстве программ картопостроения реализуется алгоритм интерполяции D^m-сплайнами, где D^m - оператор обобщенных градиентов порядка m (Дж. Альберг и др., 1972, G.S. Kimeldorf, G. Wahba, 1970, О.В. Матвеев, 1994, G. Franklin и др., 1996). Ярким представителем этих методов является метод, минимизирующий кривизну поверхности, основанный на представлении решения в виде сумм базисных функций, порожденных из сдвигов "порождающей" базисной функции. В качестве "порождающей" базисной функции используется функция Грина бигармонического оператора. Такой метод ниже будет упоминаться как *метод сплайн-интерполяции (метод функций Грина)* (В.О. Ашкеназы, 1999, В.О. Ашкеназы, 2001, В.И. Аронов, 1990, М.И. Игнатов, А.Б. Певный, 1986). В зарубежной литературе этот метод известен под названием *thin-plate splines*. Физический смысл этого метода заключается в построении поверхности, которую бы приняла жесткая деформируемая пластина, закрепленная в точках исходных данных. Для построения интерполирующей функции этим методом, необходимо решать системы линейных уравнений с плотной матрицей. Эти системы не всегда положительно определены и могут быть плохо обусловленными. В работе (В.О. Ашкеназы, 2001) рассматривается алгоритм Ж.Менге, позволяющий перейти к решению системы линейных уравнений с положительно определенной матрицей.

Метод функций Грина часто применяют для построения структурных поверхностей, описывающих геометрию геологических объектов (например геологических пластов), однако он может выдавать сильные оссцилляции функции в случае "сильно-неравномерного" распределения данных. В связи с этим были введены *"сплайны с натяжением"* (H. Mitasova, L. Mitas, 1993, W.H.F. Smith, P. Wessel, 1990, P. Wessel, D. Bercovici, 1998). В зарубежной печати этот метод называется *splines with tension*. Суть метода заключается в том, что в отличие от метода thin-plate splines вместо функций Грина бигармонического дифференциального оператора используются функции Грина оператора

$$D = (1 - T)\nabla^4 - T\nabla^2,$$

где T - задает параметр, называемый "натяжением".

Одно из современных направлений развития методов интерполяции связано с разработкой методов интерполяции радиальными базисными функциями (Radial Basis Functions - RBF) (R. Schaback, 2002, R. Schaback, 1995, R. Shaback, H. Wendland, 2001, R. Schaback, H. Wendland, 2000, M. Floater, A. Iske, 1996). Базис, состоящий из радиальных базисных функций (РБФ) также порождается сдвигами некоторой эталонной радиальной базисной функции. Термин "радиальная" происходит из свойств радиальности этих функций относительно ее цента. Аргументом радиальной функции является расстояние от ее цента до точки, в которой высчитывается значение функции. Методы РБФ-интерполяции схожи по структуре с методом сплайн-интерполяции (метод функций Грина) (G. Franklin и др., 1996) - разница заключается лишь в выборе базиса, в котором ищется решение. Применение методов РБФ-интерполяции оправдано при небольшом количестве исходных данных, т.к. возникающие в процессе построения интерполяционной функции системы линейных уравнений могут быть плохо обусловлены в случае большого количества исходных данных.

Решение задачи учета априорной информации предоставляет метод крайгинга (М. Давид, 1980, Ж. Матерон, 1968, J.J. Royer, P.C. Vieira, 1984, G. Franklin и др., 1996, M. Rauth, 1998, M. Rauth, 1995, K.E. Kerry, K.A. Hawick, 1998, В.И. Аронов, 1990, Д.А. Родионов и др., 1987). Техника моделирования вариограмм позволяет задавать изменчивость картируемого признака (выбор модели вариограммы), задание радиуса влияния скважин (выбор носителя базисной функции), учет анизотропии. Дополнительно в крайгинге накладывается ограничение на поле в областях с низкой плотностью информации - значение признака в этих областях должно выходить на среднее значение, полученное по замерам в скважинах.

Сложность метода крайгинга заключается в его исключительной вычислительной дороговизне. Предложенный алгоритм (§2.7.2,§2.7.3) решения задачи крайгинга решает эту проблему.

Основная идея метода крайгинга, как она представляется после взгляда на метод с позиций разложения по базисным функциям сдвига (§2.7.3), заключается в выборе порождающей базисной функции. Базис, составленный из сдвигов этой функции, содержит в себе информацию об изменчивости картируемого параметра. В противоположность методу крайгинга, метод интерполяции радиальными базисными функциями основан на численной эффективности метода. Базисные функции выбираются по возможности с конечным носителем и проводится тщательный анализ свойств соответствующих матричных операторов (R. Shaback, H. Wendland, 2001).

Давнюю историю имеют методы, основанные на подборе весовых коэффициентов для точек исходных данных при расчете значения в каждом узле грида. К ним относятся метод Шепарда и его модификации (D. Shepard, 1968, M. Rauth, 1998, R. Franke, 1982).

Одним из новых разрабатываемых подходов для решения задач обработки геолого-геофизической информации является применение интеллектуального анализа, в частности нейронных сетей (С.В. Горбачев, 2000, А.А. Питенко, 2000). Данный подход позволяет решать задачи путем обучения нейронных сетей на разведочных скважинах, с последующим их дообучением при поступлении новых данных.

В работе (Н.Д. Дикусар, 2002) предложен новый подход к решению задач аппроксимации и сглаживания кривых и поверхностей на основе 4-точечных преобразований. Как утверждает автор, предложенные методы позволяют создавать простые в вычислениях и устойчивые к погрешностям в исходных данных алгоритмы обработки информации.

Отдельное направление представляют собой алгоритмы, реализующие построение карт различных параметров на триангуляционной сетке вместо равномерной. Подобные методы позволяют быстро обрабатывать большие объемы информации, строить триангуляционные сетки, адаптированные к исходным данным - расположению точек с замерами, контуров, линий структурных нарушений. Из последних разработок следует отметить работы (Ю.Л. Костюк, 2002, А.Л. Фукс, 2001). А.Л. Фукс (А.Л. Фукс, 2001) предложил алгоритм быстрого построения триангуляции Делоне по большому количеству точек с исходными данными и контуров. Также в этих работах рассматривается вопрос построения визуально-гладкой интерполирующей поверхности на треугольной сетке, обсуждаются преимущества и недостатки равномерной и триангуляционной сеток. Предложен новый способ приближенного построения оптимальной триангуляции (триангуляции с минимальной суммарной длиной ребер) на основе построенной ранее триангуляции Делоне.

1.3.2. Визуализация полей геологических и геофизических параметров.

Одним из самых важных этапов построения цифровой модели нефтяного или газового месторождений является визуализация промежуточных и конечных результатов моделирования. Не смотря на то, что эта проблема изучается достаточно давно, в последнее время этой теме уделяется достаточно много внимания.

Так, например, всегда насущной будет необходимость высокой скорости обработки графической информации. Рост производительности вычислительной техники решает эту проблему лишь отчасти - для любого компьютера всегда найдется такой объем данных, с которым он не справится. В связи с резко возросшими возможностями вычислительной техники складывается тенденция к построению все более детальных геолого-геофизических моделей. Отсюда вытекают проблемы отображения и редактирования большого объема информации.

К классическим способам визуализации двумерных полей параметров (поверхностей) можно отнести:

1. **Карты.**
   Для каждого узла грида рассчитывается цвет, соответствующий значению, заданному в узле. Карта отображается как набор прямоугольников, закрашенных различными цветами, рассчитанными по узлам грида.

2. **Карты в изолиниях.**
   Карта представляет собой систему линий уровня (изолиний), т.е.

линий, вдоль которых поверхность сохраняет постоянное значение. Обычно требуется, чтобы изолинии были "достаточно гладкими".

3. **Трехмерные поверхности.**
   Поверхность в пространстве.

Современные алгоритмы построения линий уровня решают ряд проблем:

- **Повышение скорости отображения.** Проблема низкой скорости отрисовки изолиний возникает при отображении детальной карты с большим количеством линий уровня. При изменении масштаба их число на экране может достигать нескольких десятков и скорость их перерисовки может существенно замедлиться. Одно из интересных решений этой проблемы предложено А.В. Перебериным (А.Б. Переберин, 2001, А.В. Переберин, 2002) - к изолиниям, представимым в виде кубических B-сплайновых кривых, применяется техника вейвлет-анализа. Это позволяет отображать изолинии с любым разрешением. В работе (В.Н. Кутрунов и др., 2001) предлагается для применения вейвлет-анализа работать с простейшими базисными функциями «ступенька». Предложенный алгоритм также позволяет быстро переходить с одного уровня детальности представления изолинии на другой.

- **Борьба с шумами. Сглаживание изолиний.** Исходные данные, по которым строятся линии уровня, могут содержать различные погрешности и искажения. Построенные по таким данным изолинии будут "дребезжать", т.е. содержать высокочастотный шум. Такие изолинии нуждаются в дополнительном сглаживании и удалении высокочастотной составляющей (А.Б. Переберин, 2001, В.Н. Кутрунов и др., 2001). Если изолинии строятся по сетке с крупным шагом, то они в результате могут получаться ломаными. В этом случае они также нуждаются в сглаживании. Алгоритм сглаживания, основанный на свертке функции, описывающей изолинию, с B-сплайном нулевого порядка предложен в (В.Н. Кутрунов и др., 2001).

- **Учет накладываемых ограничений.**
  Построенные "гладкие" изолинии не должны пересекаться. Во избежание пересечений сглаженных изолиний могут рассчитываться т.н.

"коридоры", в которых проводятся линии уровня. В работах (Ю.Л. Костюк, 2002, А.Л. Фукс, 2001) рассматривается алгоритм расчета плавно изменяющейся изолинии, ограниченной двумя непересекающимися ломаными (т.н. коридор).

Отдельно можно выделить задачу построения изолиний с учетом дополнительной информации - линий разломов (линий тектонических нарушений). Изолинии, построенные с учетом разломов должны терпеть разрыв на линии разлома.

При отображении карты в виде трехмерной поверхности ситуация гораздо сложнее, нежели при отображении изолиний. Основной проблемой здесь является скорость визуализации. Отображение высокодетальной модели (например, построенной на равномерной сетке с количеством узлов порядка 10 000 000) прямыми методами оказывается затруднительным. Причин несколько: это и нехватка памяти компьютера, и низкая скорость отображения большого объема информации, использование нерациональных алгоритмов. Отметим три направления, в которых ведутся работы по оптимизации решения задач визуализации сложных объектов:

1. **Многомасштабное представление информации** заключается в том, что поверхность, заданная с высоким разрешением, раскладывается на версию с низким разрешением и набор уточняющих коэффициентов. Такой подход позволяет быстро переходить от грубого представления поверхности к более детальному представлению. Таким образом ускорение получается за счет сокращения объема отображаемой информации (отсечение несущественных деталей). Наиболее эффективный подход к получению многомасштабного иерархического представления поверхности связан с использованием техники вейвлет-анализа (Э. Столниц и др., 2002, А.Б. Шитов, 2001, А.В. Переберин, 2002, В. Воробьев, В. Грибунин, 1999, А.П. Петухов, 1999).

2. **Построение адаптированных сеток**, т.е. сеток, построенных в результате анализа характерной структуры изучаемого объекта. Такая сетка должна сочетать в себе две вещи: с одной стороны содержать как можно меньше вершин, с другой - обеспечивать наиболее полное представление поверхности (возможно с некоторой погрешностью). Уменьшение количества узлов позволяет ускорить процесс визуализации поверхности - ее отрисовку, вращение и т.д. В работах (А.В. Пе-

реберин, 2002, Э. Столниц и др., 2002) адаптивная триангуляционная сетка строится на основе многомасштабного представления поверхности. Перебериным предложен алгоритм построения адаптированной триангуляционной сетке на основе избыточной равномерной сетки. Применяя алгоритм вейвлет-анализа к равномерной сетке, выделяются для последующего удаления, которые не несут существенной информации и могут быть достаточно хорошо описаны соседними узлами. После исключения из равномерной сетки этих узлов получается набор вообще говоря неравномерно расположенных точек, по которым и строится триангулированная сетка.

3. **Применение высокопроизводительных алгоритмов.** Использование высокоэффективных, экономичных и простых в реализации алгоритмов для построения многомасштабного представления информации и построения адаптивных сеток является основой для построения высокопроизводительных программ визуализации большого объема информации.

1.3.3. Основные математические задачи, решаемые в процессе гридинга и визуализации, возможные направления их оптимизации.

Решение многих задачи обработки и визуализации геологической и геофизической информации сводятся к решению алгебраических систем линейных уравнений, поэтому необходимо учитывать особую структуру возникающих матричных операторов. Зачастую такие операторы обладают свойством симметрии, а иногда и положительно определены, что дает нам некоторую информацию о расположении спектра таких операторов. Такая информация обязательно должна учитываться в алгоритмах решения систем линейных уравнений, т.к. учет специфики задачи дает огромный выигрыш с точки зрения вычислительных затрат. Отметим, что известны работы, в которых эта идея в той или иной мере реализована. Например, в работе В.И.Лебедева (С. Пашковский, 1983) в итерационном процессе осуществлен учет информации о границах спектра и предложена схема, позволяющая учитывать известную информацию о том, что спектр расположен на нескольких отрезках действительной оси. В работе В.Н.Кутрунова (В.Н. Кутрунов, 1992) разработан операторный метод полинома наилучшего приближения, также учитывающий информацию о границах спектра. В работе М.В.Дмитриевского (М.В. Дмитриевский, В.Н. Кутрунов, 1998) построен итерационный метод операторного полинома наилучшего приближения на комплексном спектре.

Для эффективного применения подобных алгоритмов необходимо иметь хорошие оценки спектра матричных операторов. Подобные оценки для методов интерполяции радиальными базисными функциями можно найти в (R. Shaback, H. Wendland, 2001), где также анализируется численная устойчивость метода в зависимости от погрешности в исходных данных.

1.3.4. Проблемы подавления влияния ошибок измерений (шумов) и методы их решения.

Основными задачами, возникающими при обработке геологических и геофизических данных являются задачи аппроксимации и интерполяции функций двух переменных. Зачастую исходные данные, с которыми приходится работать алгоритмам искажены шумами, т.е. содержат в себе некоторую погрешность. Среди классических и широко распространенных методов борьбы с такими погрешностями можно выделить:

1. **Корректировка исходных данных.**
   Применение осредняющих операторов типа свертки, предложенных В.А. Василенко (В.А. Василенко, 1983) позволяет сохранять априори известные данные о поведении признака - производные, степень полинома и т.д.

   Также часто для отбора "достоверных" и отбраковки ошибочных данных применяют различные статистические критерии.

2. **Аппроксимационная постановка задачи.**
   Одно из решений задачи подавления шума заключается в аппроксимационной по постановке задачи восстановления функции. Использование различных стабилизаторов в минимизируемых функционалах, позволяет строить функции, избавленные от высокочастотных составляющих (А.М. Волков, 1988, А.Г. Плавник и др., 2002, В.И. Аронов, 1988).

3. **Корректировка грида (сглаживание).**

Проблемы шумоподавления в растровых изображениях исследовались в работах (А.Б. Шитов, 2001, В. Воробьев, В. Грибунин, 1999). Растровое изображение представляет собой массив ячеек, в каждой из которых задан цвет точки. Для подавления шумов в растровых изображениях применялась техника вейвлет-анализа. Сигнал разлагался на две составляющие - низкочастотную, представлющую собой "полезный" сигнал, и высокочастотную, являющуюся шумом. В результате такого представления сигнала появляется возможность регулировать уровень высокочастотной составляющей, тем самым давая возможность снижать уровень шума.

Наиболее часто для сглаживания грида применяют различные осредняющие фильтры. В программе Surfer ©Golden Sofware (США), помимо богатого выбора готовых фильтров, есть возможность пользователю задавать свой фильтр. Преимущества такого подхода - это прежде всего простая реализация. К недостаткам можно отнести двойной расход памяти и проблему выбора подходящего фильтра.

4. **Корректировка изолиний.**
Грид, построенный по данным, искаженным шумом также будет содержать в себе эти искажения. В результате этого изолинии, построенные по такому гриду тоже будут искажены шумом, будут содержать т.н. "дребезг". Построенные по таким данным изолинии требуют сглаживания. В работе (А.Б. Переберин, 2001) рассматривается применение B-сплайновых вейвлетов для обработки линий уровня и их отображения с различными масштабами. Кутруновым В.Н. предложен метод обработки линий уровня, состоящий в последовательном изменении исходного ступенчатого сигнала с помощью вейвлет- преобразований. С помощью этого метода из кривой удаляется высокочастотная составляющая. Изменённая ступенчатая кривая сглаживается с помощью сплайнов до любого уровня гладкости без решения алгебраических систем уравнений (В.Н. Кутрунов и др., 2001). Также проблема сглаживания изолиний рассматривается в работах (А.В. Переберин, 2002, Л.Г. Белиовская и др., 2000).

2. Математические методы обработки исходной геологической и геофизической информации и их модернизация.

Задача восстановления полей геологических и геофизических параметров определяет характерный для моделирования нефтяных месторождений класс задач - интерполяционное восстановление полей по нерегулярной сети скважин, в которых задаются граничные условия. Дополнительно от таких методов требуется, чтобы исследователь имел возможность влиять на результат интерполяции путем задания своего видения восстанавливаемого поля. Каждый метод предоставляет такую возможность по-своему: либо существует возможность управлять видом минимизирующего функционала, либо можно накладывать на результирующую поверхность некоторые дополнительные ограничения. Для увеличения достоверности карты также решаются задачи учета различных тектонических нарушений (разломов) и т.д. Например, в методах построения карт с помощью аппроксимации параметра, используются различного рода стабилизаторы, которые обеспечивают тот или иной уровень сглаживания данных, или учет той или иной дополнительной информации о поведении параметра на изучаемой площади (А.М. Волков, 1988, В.И. Аронов, 1990). Другой подход к решению таких задач предоставляет метод крайгинга. Техника моделирования вариограмм позволяет задавать изменчивость картируемого признака (выбор модели вариограммы), задание радиуса влияния скважин (выбор носителя базисной функции), учет анизотропии.

2.1. Конструирование "метода последовательной минимизации функционалов" (ПМФ), учитывающего исходные данные различной природы и информационной значимости.

Предлагаемый ниже *метод последовательной минимизации функционалов (ПМФ)* позволяет четко разделить влияние каждого типа исходной информации, используемой для построения карты некоторого геолого-геофизического параметра. Это достигается за счет классификации по степени достоверности всех исходных данных, используемых для построения карты параметра. Так, например, наиболее достоверными можно считать данные, полученные по замерам значения параметра в скважинах. Такие данные будут учитываться в первую очередь. Наименее достоверными будут различного рода косвенные априорные предположения о поведении картируемого параметра в областях отсутствия данных. Такие данные будут учитываться в последнюю очередь. Построенная классификация определяет последовательность исходных данных, в которой они отсортированы по убыванию их достоверности.

Пусть функция, описывающая восстанавливаемое поле геолого-геофизического параметра, ищется в виде разложения по некоторому базису:

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{P-1} a_j B_j(x,y),$$

где a_j - набор неизвестных коэффициентов, которые необходимо определить, а $B_j(x,y)$ - набор функций, образующих базис, в котором ищется решение. В качестве базисных функций могут выступать как функции с бесконечным, так и с локальным носителем.

Неизвестные коэффициенты a_j будем определять из минимизации последовательности функционалов, составленной по построенной выше последовательности исходных данных. Для каждого типа исходных данных записывается свой функционал, описывающий способ их учета. Так, первый функционал последовательности описывает способ учета наиболее достоверной информации. Если в результате его минимизации остаются неопределенными некоторые из коэффициентов $a_{j,\,j=0,\ldots,P-1}$, то минимизируется следующий функционал последовательности, описывающий способ учета менее достоверных данных. Последним в последовательности должен быть функционал, замыкающий решение, т.е. в результате его минимизации должны быть определены все коэффициенты, ненайденные из минимизации предыдущих функционалов. Такой функционал описывает способ учета наименее достоверной информации, известной по всей площади, на которой строится карта.

Как уже отмечалось выше, наиболее достоверной информацией, используемой при восстановлении полей геолого-геофизических параметров, являются замеры картируемого параметра, произведенные в скважинах. Пусть имеется набор таких замеров $\{z_0, \ldots, z_{K-1}\}$, произведенных в K скважинах с координатами $\{(x_0, y_0), \ldots, (x_{K-1}, y_{K-1})\}$. Запишем первый функционал последовательности, отвечающий за аппроксимацию таких данных:

$$\Phi_1(a_0, \ldots, a_{P-1}) = \sum_{i=0}^{K-1} \left(z_i - f(x_i, y_i)\right)^2 \to \min. \tag{2.1}$$

Для минимизации этого функционала необходимо решить алгебраическую систему, состоящую из уравнений:

$$\frac{\partial \Phi_1(a_0, \ldots, a_{P-1})}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, \ldots, P-1.$$

Решение такой системы может быть неединственным. Например в ней могут оказаться строки вида

$$0 = 0,$$

возникающие в случае, если какой-либо коэффициент a_k не входит ни в одно из слагаемых (2.1). Решение также может быть неединственным, если одни коэффициенты выражаются через другие. Например, такая ситуация возможна если базисные функции $B_j(x, y)$ имеют бесконечный носитель. Таким образом, при минимизации функционала (2.1) может возникнуть произвол в определении некоторых коэффициентов.

Для того, чтобы определить коэффициенты, не определенные однозначно из минимизации функционала (2.1), запишем следующий функционал последовательности, учитывающий другую известную, но менее достоверную информацию о восстанавливаемом поле. Часто при построении карт геолого-геофизических полей помимо данных в скважинах задается некоторая *вспомогательная поверхность*, иногда называемая трендом. Обычно, при задании вспомогательной поверхности, от карты требуют, чтобы она "напоминала" вспомогательную поверхность (тренд) в областях низкой плотности скважин. Так, например, при построении структурных карт, описывающих геометрию нефтеносных пластов, в качестве вспомогательной поверхности часто используют результаты интерпретации сейсмических исследований, которые представляют собой некоторую функцию $t(x, y)$, заданную в области $\Omega_t = [a, b] \times [c, d]$. Функционал, учитывающий вспомогательную поверхность запишем следующим образом:

$$\Phi_2(a_0, \ldots, a_{P-1}) = \int\limits_{\Omega_t} \left[(f_x - t_x)^2 + (f_y - t_y)^2\right] dx\, dy \to \min, \tag{2.2}$$

где $t = t(x, y)$ - вспомогательная поверхность или некий тренд. Смысл этого функционала в том, что искомая функция $f(x, y)$ должна как можно точнее повторять все наклоны функции $t(x, y)$ в области Ω_t.

Функционал (2.2) минимизируется с учетом того, что функционал (2.1) уже достиг своего минимума, т.е. решается задача на условный экстремум. Такой способ минимизации второго функционала последовательности обеспечивает "превосходство" наиболее достоверных данных над менее достоверными - более достоверные данные учитываются в первую очередь. Для решения задачи поиска условного экстремума функционала (2.2) воспользуемся методом *неопределенных множителей Лагранжа*:

$$\begin{aligned}\Psi_2(a_0, \ldots, a_{P-1}) = \Phi_2(a_0, \ldots, a_{P-1}) + \\ + \sum_{k=0}^{P-1} \lambda_k \frac{\partial \Phi_1(a_0, \ldots, a_{P-1})}{\partial a_k} \to \min .\end{aligned} \tag{2.3}$$

Функционал (2.3) минимизируется по тем коэффициентам, которые не были определены из минимизации функционала (2.1). В случае, если функционал (2.1) не зависит от этих коэффициентов, то при дифференцировании (2.3) второе слагаемое обращается в ноль и задача на поиск условного экстремума сводится к решению систем линейных уравнений

$$\frac{\partial \Phi_2(a_0, \ldots, a_{P-1})}{\partial a_k} = 0,$$

где индекс k пробегает значения номеров коэффициентов, ненайденных из минимизации первого функционала.

В случае, если вспомогательная поверхность $t(x, y)$ не задана, или же после минимизации функционала (2.3) остались неопределенными некоторые коэффициенты, то для доопределения неизвестных коэффициентов необходимо использовать *замыкающий* функционал, несущий в себе информацию о поведении параметра в области отсутствия информации. Такой вид данных является наименее достоверным. Например, можно использовать предположение о том, что поле должно мало отличаться от константы или, как вариант, - от некоторой плоскости. В виде функционала это утверждение запишется следующим образом:

$$\Phi_3(a_0,\ldots,a_{P-1}) = \alpha \int\limits_{\Omega} \left[f_x^2 + f_y^2\right] dx\ dy + \\ \beta \int\limits_{\Omega} \left[f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2\right] dx\ dy \to \min\,. \tag{2.4}$$

Здесь первый интеграл требует от поверхности $f(x, y)$, чтобы она "как можно меньше" отличалась от константы, а второй функционал - от плоскости. Выбирая коэффициенты $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, можно увеличивать или уменьшать вес соответствующего слагаемого.

Задачу нахождения условного экстремума функционала (2.4) при достижении минимума функционала (2.3) можно также записать воспользовавшись методом неопределенных множителей Лагранжа:

$$\Psi_3(a_0,\ldots,a_{P-1}) = \Phi_3(a_0,\ldots,a_{P-1}) + \sum_{k=0}^{P-1} \lambda_k \frac{\partial \Psi_2(a_0,\ldots,a_{P-1})}{\partial a_k}. \tag{2.5}$$

Как и в предыдущем случае, минимизация этого функционала производится только по набору не найденных ранее коэффициентов. В случае, если функционал Ψ_2 не зависит от этих коэффициентов, решение задачи сводится к решению системы линейных уравнений:

$$\frac{\partial \Phi_3(a_0,\ldots,a_{P-1})}{\partial a_k} = 0.$$

При построении карт геолого-геофизических параметров можно составлять и другие последовательности функционалов, отличающиеся от рассмотренной выше.

Общая схема построения функции $f(x, y)$, названная *методом последовательной минимизации функционалов (ПМФ)* выглядит следующим образом:

1. Все имеющиеся исходные данные классифицируются по степени их достоверности - от наиболее достоверных данных, до предположений, накладываемых на восстанавливаемое поле.

2. Для каждого типа исходных данных записывается функционал, описывающий способ учета этих данных при построении поля параметра.

При этом очередность функционалов должна соответствовать определенной выше классификации достоверности того или иного типа исходных данных.

3. Минимизируется первый функционал последовательности. В результате можно выделить три возможные ситуации:

   (а). Найдены все неизвестные коэффициенты $a_0, \ldots, a_{P-1}$ - решение построено.

   (б). Найдена часть коэффициентов $a_{K_0}, \ldots, a_{K_m}$.

   (в). Не удается однозначно определить хотя-бы один неизвестный коэффициент.

4. Второй функционал может быть минимизирован двумя способами:

   (а). Решается задача на условный экстремум

   $$\Psi_2(a_0, \ldots, a_{P-1}) = \Phi_2(a_0, \ldots, a_{P-1}) + \\ + \sum_{k=0}^{P-1} \lambda_k \frac{\partial \Phi_1(a_0, \ldots, a_{P-1})}{\partial a_k} \to \min .$$

   Производные, вычисляемые при минимизации этого функционала по вычисленным на предыдущем этапе коэффициентам не берутся.

   (б). В случае, если функционал $\Phi_1(a_0, \ldots, a_{P-1})$ не зависит от оставшихся неопределенными коэффициентов, то при дифференцировании $\Psi_2(a_0, \ldots, a_{P-1})$ по этим коэффициентам второе слагаемое будет обращаться в ноль и задача поиска экстремума функционала $\Psi_2(a_0, \ldots, a_{P-1})$ сведется к решению системы линейных уравнений

   $$\frac{\partial \Phi_2(a_0, \ldots, a_{P-1})}{\partial a_k} = 0.$$

   Здесь индекс k принимает значения номеров ненайденных ранее коэффициентов.

5. Подобным образом последовательно минимизируется вся цепочка построенной последовательности функционалов. Минимизация последнего функционала должна гарантировать определение всех неопределенных ранее коэффициентов.

Помимо учета описанных типов исходных данных, можно также записать функционалы для учета значений, заданных на пространственных кривых, функционалы, учитывающие линии разломов и т.д. Для учета таких данных также необходимо обозначить место соответствующих функционалов в общей последовательности.

2.2. Анализ функциональных базисов, используемых при пересчете данных в процессе гридинга.

Существует множество различных алгоритмов расчета карт. Многие из них применяются для расчета значений в узлах равномерной сетки, т.е. для *гридинга*. Алгоритмы могут различаться по множеству параметров. Одним из таких параметров является вид базисной функции, используемой для построения решения. В свою очередь наиболее часто используемые базисные функции можно разбить на два класса:

1. Функции, имеющие бесконечный носитель.

2. Функции, имеющие локальный носитель.

Ниже предложен анализ базисных функций, наиболее часто встречающихся в задачах обработки геолого-геофизических данных. Анализ базисных функций проведен с позиций локальности их носителя, сложности вычисления их значений, сложности матричных операторов, возникающих при их использовании. Основной целью этого анализа является выбор базисной функции для практической реализации метода ПМФ на компьютере. Полученная реализация должна удовлетворять следующим требованиям:

- способность обрабатывать большие объемы исходной геолого-геофизической информации.

- способность строить карты высокой детальности (большой размер грида)

Как следствие выдвинутых требований, в процессе реализации метода ПМФ нужно стремиться к тому, чтобы

- получающиеся в результате минимизации функционалов матрицы были существенно разреженными и имели простую структуру - элементы матрицы должны вычисляться по небольшому набору простых формул. При этом отпадает необходимость хранения больших матриц в памяти;

- в процессе минимизации последовательности функционалов метода ПМФ должна возникнуть легко реализуемая возможность отказа от использования метода неопределенных множителей Лагранжа. В этом случае размерности решаемых алгебраических систем могут уменьшится в несколько раз - в зависимости от количества минимизируемых функционалов в методе ПМФ;
- алгоритм вычисления значений построенной функции $f(x, y)$ был экономичным;

2.2.1. Нелокальные базисы.

Как это ни странно, но практика использования нелокальных базисных функций находит широкое применение в решении задач картопостроения. Использование таких функций несет с собой множество проблем, связанных со сложностью вычислений:

1. Матрицы, возникающие в процессе построения интерполирующей функции получаются плотными и зачастую плохо обусловленными. Также редко они бывают положительно определенными. Этот "набор" свойств матриц склоняет к использованию прямых методов (например, метода Гаусса) для решения систем линейных уравнений.
2. Сложность вычисления значений нелокальных базисных функций также может стать проблемой, т.к. эту операцию приходится проделывать много раз. Обычно такие базисные функции имеют сложный вид - могут содержать логарифмические, степенные и экспоненциальные функции.

К методам, построенным на использовании базисных функций с бесконечным носителем можно отнести:

1. Метод интерполяции радиальными базисными функциями (РБФ).
2. Метод крайгинга.
3. Метод сплайн-интерполяции (метод функций Грина).

Рассмотрим типичную систему линейных уравнений, которая получается при интерполяции методами 1, 2 и 3 из приведенного выше списка:

$$\begin{pmatrix} B_0(p_0) & B_1(p_0) & \dots & B_{N-1}(p_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_0(p_{N-1}) & B_1(p_{N-1}) & \dots & B_{N-1}(p_{N-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Смысл этой матрицы в следующем. Строится интерполяционная функция

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i B_i(x,y),$$

состоящая из N базисных функций $B_i(x,y)$ с бесконечным носителем. $f(x,y)$ интерполяционная - значит должна проходить через интерполяционные точки. Таких точек тоже N штук - столько же, сколько базисных функций. Эти точки имеют координаты $p_i = \{x_i, y_i\}$ с заданными в них значениями z_i. В уравнениях системы записано требование прохождения функции $f(x,y)$ через эти точки. Полученная матрица всегда будет плотной - в силу того, что в ней будет очень мало нулевых элементов. Для хранения такой матрицы может потребоваться колоссальный объем оперативной памяти. Например, при построении карты кровли пласта АВ(1-3) Самотлорского месторождения абсолютные отметки кровли известны по 15000 скважин. Тогда соответствующая матрица будет иметь размерность $15\ 000 \times 15\ 000 = 225\ 000\ 000$ элементов. Для хранения одного элемента необходимо 8 байт. Общий объем памяти для хранения такой матрицы будет равен ≈ 1.67 гигабайт. Если учесть симметрию матрицы, то можно сократить объем памяти вдвое, но все-равно он будет слишком велик. Особенно трудно разрешить такую систему линейных уравнений - применение прямых методов требует слишком много машинного времени, при этом, в процессе счета нарастает численная погрешность. Итерационные методы также плохо подходят для решения таких систем уравнений из-за медленной скорости сходимости, которая объясняется прежде всего плохой обусловленностью самой матрицы. Один вариант решения этой проблемы можно найти в (R. Schaback, H. Wendland, 2000).

По этой причинам вышеуказанные методы не применяют для расчета карт по месторождениям с большим объемом исходной информации. Вместо этого используют различные "хитрости" - построение карты по отдельным участкам с последующей сшивкой (H. Mitasova, L. Mitas, 1993), прореживание скважин и т.д.

Существует еще одна проблема использования базисных функций с бесконечным носителем. Построение карт высокой детальности, или карт и избыточной сеткой также может потребовать достаточно много машинного времени. Как уже отмечалось выше, это происходит из-за того, что вычисление значений такой базисной функции - достаточно трудоемкая операция. Для примера приведем некоторые наиболее часто используемые базисные функции с бесконечным носителем:

Гауссиана	$\phi(r) = \exp^{-\alpha r^2}, \alpha > 0,$
Полигармонический сплайн	$\phi(r) = r^\beta, \beta \in \mathbb{R}_{>0} \setminus 2\mathbb{N},$
Сплайн "тонкая пластина"	$\phi(r) = r^\beta \log r, \beta \in 2\mathbb{N},$

где $\phi_i(x, y) = \phi_i(r) = \phi(r_i)$, $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$. $phi(r)$ - это так называемая *радиальная базисная функция (РБФ)*.

Если рассматривать *вариограммы*, используемые в методе крайгинга для описания изменчивости параметра, как радиальные базисные функции, то увидим, что они также имеют бесконечный носитель:

Сферическая вариограмма
$$\begin{cases} \phi(r) = C\left(\frac{3r}{2a} - \frac{r^3}{2a^3}\right) + C_0, \text{ если } r \le a \\ \phi(r) = C + C_0, \text{ если } r > a, \\ \phi(0) = 0 \end{cases}$$

Вариограмма де-Вийса	$\phi(r) = A\ln(r) + B$
Линейная вариограмма	$\phi(r) = Ar + B$

Даже если карта строится по 100 скважинам, но размерность грида составляет порядка 1 000 000 узлов, то расчет значений во всех узлах грида займет много времени. Пусть, например, в качестве базисной функции использовались функции "тонкая пластина". Тогда для расчета одного узла грида необходимо вычислить значения 100 логарифмов, а для всей сетки - 100 000 000. В работах (R.K. Beatson, E. Chacko, 2000, R.K. Beatson, G.N. Newsam, 1992) предложен способ более быстрого вычисления значений радиальных базисных функций.

Тем не менее, не смотря на описанные недостатки базисных функций с бесконечным носителем, они широко применяются для построения карт по небольшим месторождениям с использованием грида, где количество узлов порядка 10 000 $-$ 100 000.

Отмеченные выше недостатки этих базисных функций делают нецелесообразным их применение для реализации метода последовательной минимизации функционалов по следующим причинам:

1. Получающиеся в результате минимизации функционалов матрицы будут плотными.

2. Отказ от использования метода неопределенных множителей Лагранжа будет представлять собой значительную алгоритмическую сложность.

3. Полученная реализация метода ПМФ будет неприменима для построения высокодетальных карт по большим месторождениям, содержащим большой объем информации.

2.2.2. Базисные функции с локальным носителем.

Среди базисных функций с локальным носителем для решения задач геологии и геофизики наибольшее распространение получили В-сплайны третьего порядка (В.А. Василенко, 1983, В.А. Василенко, 1986, А.М. Волков, 1988, В.Н. Пьянков и др., 2002, В.Н. Пьянков, М.В. Дмитриевский, 2002а, В.И. Аронов, 1988). Широкому распространению В-сплайны обязаны таким своим "хорошим" свойствам как локальность и простота вычисления значений функции. Эти базисные функции часто применяются при построении карты в виде аналитической функции

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{P-1} a_i B_i(x, y),$$

где $B_i(x, y)$ - В-сплайны третьего порядка. Неизвестные коэффициенты a_k ищутся из минимизации специального функционала (В.А. Василенко, 1983, А.М. Волков, 1988, В.И. Аронов, 1988, А.Г. Плавник и др., 2002). Обычно такой функционал содержит несколько слагаемых, входящих в общую сумму со своими весовыми коэффициентами. Каждое слагаемое в таком функционале описывает способ учета того или иного типа исходных данных, таких как значения параметра в скважинах, учет результатов сейсмических исследований, различных априорных косвенных предположений.

Например, в работе (А.М. Волков, 1988) рассматривается функционал следующего вида:

$$\sum_{i=0}^{N-1} (f(x_i, y_i) - z_i)^2 + \alpha ||Df||_{L_2}^2.$$

Первое слагаемое в этом функционале отвечает за аппроксимацию значений z_i заданных в N скважинах с координатами (x_i, y_i). Отметим, что при построении поля параметра с использованием В-сплайнов, количество базисных функций обычно берется большим, чем количество скважин, т.е. $P > N$.

Второе слагаемое $||Df||^2_{L_2}$ - это так называемый *стабилизирующий функционал*. Обычно рассматриваются два его конкретных типа:

$$\int\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx\ dy;$$

$$\int\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx\ dy;$$

Стабилизирующий функционал вводится не только для хорошей устойчивости решения. С его помощью также можно закладывать некоторые дополнительные условия (А.Г. Плавник и др., 2002, А.М. Волков, 1988), такие как:

- минимум осцилляции поверхности;
- учет вспомогательной поверхности (тренда);
- учет данных, заданных на других носителях (например учет значений, заданных на кривых);

При построении карт с использованием изложенной выше технологии приходится решать следующие задачи:

1. **Хранение больших матриц в памяти.**
   Т.к. матрицы получаются больших размерностей, то возникает проблема их хранения в памяти. В силу ленточной структуры матриц используют два подхода:

   (а). хранят в памяти ненулевые элементы матрицы;

   (б). элементы матриц вычисляются по заданному набору формул (В.А. Василенко, 1983).

2. **Решение возникающих систем линейных уравнений.**
   Классикой является использование метода прогонки. Также часто применяют итерационные методы.

3. **Плохая обусловленность матриц.**
   В некоторых случаях матрицы получаются плохо обусловленными (А.Г. Плавник и др., 2002), что влияет на устойчивость решения и скорость сходимости итерационных методов.

4. **Вычисление значений функции $f(x, y)$ в узлах равномерной сетки.**
   Эта задача не вызывает особых трудностей, т.к. в расчете одного узла сетки участвуют несколько базисных функций (в силу их локальности). Для вычисления значения одного B-сплайна третьего порядка необходимо вычислить значение соответствующего полинома третьей степени.

С точки зрения метода ПМФ, проведенный анализ базисных функций склоняет к использованию базисных функций с **локальным** носителем. Практика частого использования B-сплайнов третьего порядка для решения задач минимизации функционалов (А.М. Волков, 1988,В.А. Василенко, 1983, S. Lee и др., В.И. Аронов, 1988) подсказывает выбрать именно эту базисную функцию. Но, как оказывается, наиболее предпочтительной с вычислительной точки зрения оказывается другая базисная функция с локальным носителем.

2.2.3. Ступенчатая функция как наиболее оптимальный базис с вычислительной точки зрения.

Пожалуй, самым удачным с вычислительной точки зрения, будет выбор базисной функции типа "ступенька" (она же B-сплайн нулевого порядка). Рассмотрим базис $\{\omega_i(x)\}$:

$$\omega_i(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[ih + a - \frac{h}{2}, (i+1)h + a - \frac{h}{2}\right) \\ 0, x \notin \left[ih + a - \frac{h}{2}, (i+1)h + a - \frac{h}{2}\right) \end{cases}.$$

Отметим основные свойства этого базиса:

1. Базис ортогонален в $L_2(\mathbb{R})$, но не является полным. Его ортогональность обеспечивается локальным носителем функции. Более того, носители функций не пересекаются. Это значит, что базисная функция одна описывает поведение приближаемой функции, на небольшом участке, являющимся ее носителем.

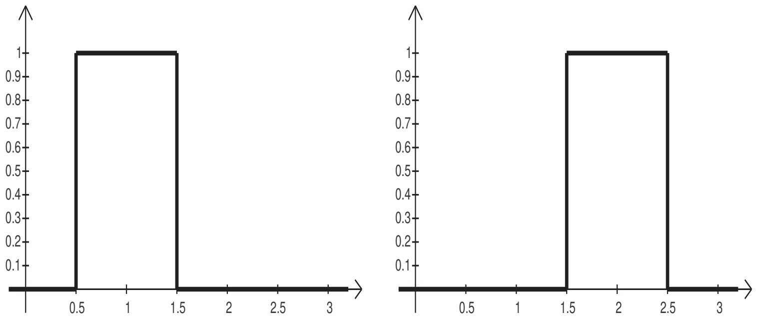


Рис. 2.1. Базисная функция "ступенька"

2. Простота использования базисной функции с вычислительной точки зрения. Пожалуй это самая простая функция, значение которой можно вычислять на компьютере.

3. Ее использование в алгоритмах аппроксимации и интерполяции приводит к существенно разреженным матрицам с ленточной структурой. Таким образом отпадает необходимость хранить матрицы в памяти. Коэффициенты таких матриц можно вычислять по ходу вычислений по набору простых формул.

4. Простота получаемых матриц позволяет получить оценки спектра соответствующих матричных операторов.

5. Разложение функции в базисе типа "ступенька" идеально подходит для хранения карт в виде грида. Легко вычисляются значения функции. Более того, если решение искалось в "ступенчатом" базисе, то после этого нет необходимости вычислять значения построенной функции в узлах равномерной сетки, т.к. они *уже* посчитаны и равны коэффициентам разложения функции по базису.

6. Как будет показано ниже, при реализации метода ПМФ, практически всегда можно отказаться от использования метода неопределенных множителей Лагранжа, что приводит к решению матриц меньших размерностей.

7. Детальные карты, построенные на избыточном гриде легко пересчитываются в карту с меньшей детальностью. Используемые при этом алгоритмы *вейвлет-анализа* записываются несколькими простыми для вычислений на компьютере формулами. Применение техники

вейвлет-анализа также позволяет производить операцию редактирования карты на различных уровнях детальности, убирать из карты высокочастотные колебания (шум) и т.д.

2.3. Конструирование алгебраических систем на основе "метода последовательной минимизации функционалов" с использованием ступенчатой базисной функции.

Для построения карты, необходимо рассчитать значения картируемого параметра в узлах равномерной сетки. Пусть сетка находится в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$ и состоит из NM узлов, где N - количество узлов по оси OX, M - количество узлов по оси OY. Шаг сетки (расстояние между узлами) возьмем равным h:

$$S = \left\{ \begin{matrix} (\overline{x}_k, \overline{y}_l): & a & = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_{N-1} = b \\ & c & = \overline{y}_0 < \overline{y}_1 < \ldots < \overline{y}_{M-1} = d \end{matrix} \right\}, \tag{2.6}$$

$$\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i = h,\ \overline{y}_{i+1} - \overline{y}_i = h.$$

Узлы сетки, расположенные вдоль оси OX образуют строки, вдоль оси OY - столбцы (см. рис. 2.2).

В дальнейшем изложении будем использовать два способа нумерации базисных функций:

1. **Сквозной**. Все номера узлов грида и базисных функций изменяются от 0 до $NM - 1$. В случае сквозной нумерации базисная функция будет иметь один индекс: $B_i(x, y)$. Так, функции, принадлежащие нулевому ряду имеют номера $\{0, 1, 2, \ldots, N - 1\}$. Для первого ряда номера будут $\{N, N + 1, N + 2, \ldots, 2N - 1\}$ и т.д. для остальных рядов. Пример K-го ряда изображен на рисунке 2.2 на второй картинке. Таким же образом функции, принадлежащие нулевому столбцу будут иметь номера $\{0, N, 2N, \ldots, (M - 1)N\}$, первому столбцу $\{1, N + 1, 2N + 1, \ldots, (M - 1)N + 1\}$ и т.д. для остальных столбцов. Пример K-го столбца изображен на третьей картинке рисунка 2.2.

2. **Двухиндексный**. При этой нумерации первый индекс указывает на номер столбца, второй - на номер строки в которой находятся узел или базисная функция. При этом базисная функция будет иметь два индекса: $B_{I,J}(x, y)$. Номера столбцов изменяются от $\{0, 1, \ldots, N - 1\}$, а строк $\{0, 1, \ldots, M - 1\}$.

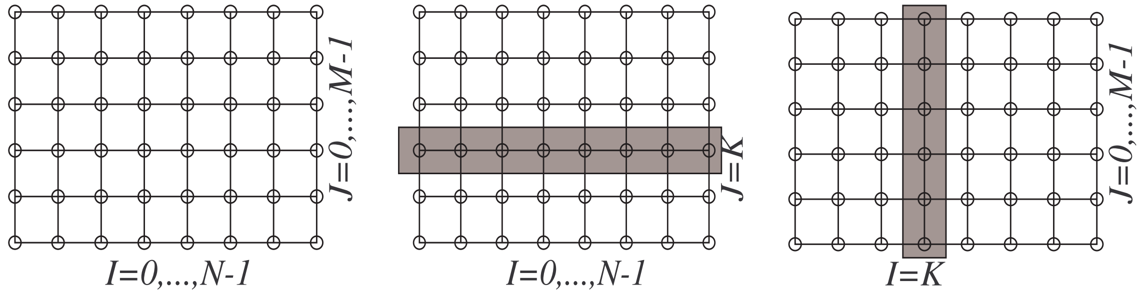


Рис. 2.2. Схема нумерации узлов грида.

Функцию $f(x,y)$, описывающую поведение картируемого геологического или геофизического параметра будем искать в виде

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{NM-1} a_i B_i(x,y) = \sum_{J=0}^{M-1} \sum_{I=0}^{N-1} a_{I,J} B_{I,J}(x,y), \tag{2.7}$$

где

$$B_i(x,y) = B_{I,J}(x,y) = \omega_I(x)\omega_J(y), \tag{2.8}$$

$$i = I + JN. \tag{2.9}$$

Носителем базисной функции $B_i(x,y) = B_{I,J}(x,y)$ является прямоугольник $[a + Ih - h/2, a + Ih + h/2] \times [c + Jh - h/2, c + Jh + h/2]$. Центром базисной функции $B_i(x,y) = B_{I,J}(x,y)$ является точка $(a+Ih, c+Jh)$. Базисные функции "ступенька" расположены так, что их центры находятся точно в узлах равномерной сетки и индексы базисных функций совпадают с индексами соответствующих узлов равномерной сетки.

2.3.1. Аппроксимация скважинных данных.

Рассмотрим теперь, как будет решаться задача минимизации "первого" функционала (2.1) в базисе "ступенчатых" функций. Этот функционал отвечает за аппроксимацию данных, являющихся замерами картируемого параметра в скважинах. Пусть эти данные заданы K хаотически расположенными точками с координатами $\{(x_i, y_i)\}_{i=0,\ldots,K-1}$ и значениями

$\{z_i\}_{i=0,\ldots,K-1}$. Тогда:

$$\begin{aligned}\Phi_1(a_0,\ldots,a_{NM-1}) &= \sum_{i=0}^{K-1}(z_i - f(x_i,y_i))^2 \\ &= \sum_{i=0}^{K-1}\left(z_i - \sum_{j=0}^{NM-1} a_j B_j(x_i,y_i)\right)^2 \to \min .\end{aligned} \tag{2.10}$$

Для задачи минимизации функционала (2.10) верна теорема:

Теорема 2.3.1. *Если задача* (2.10) *имеет неединственное решение, то исходных данных столько, и они расположены на неравномерной сетке так, что система линейных уравнений, получаемая при минимизации функционала* (2.10) *имеет нулевые строки и соответствующие нулевые столбцы.*

Доказательство. В силу того, что носители базисных функций $B_j(x,y)$ не пересекаются, любая точка с координатами (x_i,y_i) принадлежит носителю только одной базисной функции. Таким образом, для любой базисной функции возможны три ситуации:

1. Для базисной функции $B_j(x,y)$ не нашлось ни одной точки исходных данных, принадлежащих ее носителю. В этом случае коэффициент a_j не войдет ни в одно из слагаемых (2.10) и дифференцирование по a_j даст выражение
$$0 = 0. \tag{а}$$

2. Для базисной функции $B_j(x,y)$ нашлась одна точка исходных данных (например (x_k,y_k) со значением z_k), принадлежащая ее носителю. Тогда коэффициент a_j войдет в сумму (2.10) один раз и дифференцируя ее по a_j получим:
$$2(a_j - z_k) = 0.$$
Следовательно, коэффициент a_j однозначно определяется,
$$a_j = z_k. \tag{б}$$

3. Для базисной функции $B_j(x,y)$ нашлось K_j точек исходных данных, принадлежащих ее носителю. Тогда коэффициент a_j войдет в сумму (2.1) ровно K_j раз. Дифференцируя (2.10) по a_j, получим:
$$\underbrace{2(a_j - z_{k_1}) + 2(a_j - z_{k_2}) + \ldots + 2(a_j - z_{k_{K_j}})}_{K_j} = 0,$$

откуда, как и в предыдущем случае

$$a_j = \frac{z_{k_1} + z_{k_2} + \ldots + z_{k_{K_j}}}{K_j}. \tag{в}$$

Составленная из выражений вида (б) и (в) система линейных уравнений будет иметь единственное решение, т.к. соответствующая ей матрица будет диагональной. Если число уравнений (б) и (в) равняется количеству базисных функций, то тогда все коэффициенты однозначно определяются и задача минимизации имеет единственное решение. Если имеется хотя бы одно выражение типа (а), то тогда соответствующий ему коэффициент из задачи минимизации (а) не определяется. Неопределенные коэффициенты могут быть произвольными и, следовательно, задача минимизации функционала (а) имеет неединственное решение.

□

Следствие 2.3.1. *Задача (2.10) имеет единственное решение, если для каждой базисной функции $B_j(x, y)$ найдется хотя бы одна точка исходных данных z_k , для которой координата (x_k, y_k) принадлежит носителю $B_j(x, y)$.*

Следствие 2.3.2. *Критерием неединственности является существование хотя бы одной базисной функции, для которой отсутствуют точки исходных данных, координаты (x, y) которых принадлежат ее носителю.*

Вывод. При решения задачи минимизации функционала (2.10) возникает система линейных уравнений с диагональной матрицей. Нахождение решения такой системы не составляет труда и задается формулами (б) и (в). Если в строке k диагональный элемент матрицы равен нулю, то соответствующая строка с номером k вычеркивается из системы линейных уравнений. Это происходит потому, что из задачи минимизации функционала не удается однозначно определить коэффициент a_k. Такие коэффициенты будут определены позже, из минимизации последующих функционалов.

Из-за неравномерности исходных данных редко когда все коэффициенты определяются из минимизации функционала (2.10). Для их доопределения приходится использовать следующий по степени важности функционал.

2.3.2. Замыкающий функционал.

Рассмотрим задачу минимизации одного из возможных замыкающих функционалов, предложенного в §2.1:

$$\begin{aligned}\Phi_3(a_0,\ldots,a_{NM-1}) = \alpha \int\limits_\Omega \left[f_x^2 + f_y^2\right] dx\, dy + \\ \beta \int\limits_\Omega \left[f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2\right] dx\, dy \to \min\,.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Поле мало отличается от константы.

Отдельно рассмотрим, как будет минимизироваться первый интеграл в (2.4):

$$\Phi_{31}(a_0,\ldots,a_{NM-1}) = \alpha \int\limits_\Omega \left[f_x^2 + f_y^2\right] dx\, dy. \tag{2.11}$$

Этот функционал выражает математическую запись нашего предположения о том, что поле мало отличается от константы. Реализуя это предположение, необходимо записать производные поля в каждом узле сетки по направлению осей OX и OY и составить сумму квадратов этих производных. Минимизация этой суммы с помощью выбора коэффициентов a_k, которые не были определены из минимизации предыдущих функционалов, обеспечивает наименьшие значения производных $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в узлах сетки. Так как геометрический смысл этих производных - это тангенсы наклонов касательных к поверхности по направлению осей OX и OY, то малость этих величин говорит о близости поверхности к константе (предполагаем, что, например, из геологических соображений известно, что поле при его формировании было плоским, а затем деформировалось в отдельных его частях).

Точно также, в качестве замыкающего функционала можно было бы потребовать от поля, чтобы оно "как можно меньше" изменялось вдоль выбранного направления $l = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$, т.е. минимизировать интеграл

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{df}{dl}\right)^2 dxdy = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha\right)^2 dxdy.$$

Учитывая, что данные задаются дискретно, аналогом формулы (2.11) будет:

$$\Phi_{31}(a_0, \ldots, a_{NM-1}) = \alpha \sum_{J=0}^{M-1} \sum_{I=0}^{N-2} \left(\frac{f(\overline{x}_{I+1}, \overline{y}_J) - f(\overline{x}_I, \overline{y}_J)}{\overline{x}_{I+1} - \overline{x}_I} \right)^2 + $$
$$+ \ \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-2} \left(\frac{f(\overline{x}_I, \overline{y}_{J+1}) - f(\overline{x}_I, \overline{y}_J)}{\overline{y}_{J+1} - \overline{y}_J} \right)^2 =$$

$$= \alpha \sum_{J=0}^{M-1} \sum_{I=0}^{N-2} \left(\frac{a_{I+1,J} B_{I+1,J}(\overline{x}_{I+1}, \overline{y}_J) - a_{I,J} B_{I,J}(\overline{x}_I, \overline{y}_J)}{h} \right)^2 +$$
$$+ \ \alpha \sum_{J=0}^{M-1} \sum_{I=0}^{N-2} \left(\frac{a_{I,J+1} B_{I,J+1}(\overline{x}_I, \overline{y}_{J+1}) - a_{I,J} B_{I,J}(\overline{x}_I, \overline{y}_J)}{h} \right)^2$$

Учитывая, что шаг сетки равномерный и равен h, а также что $B_{IJ}(\overline{x}_I, \overline{y}_J) = 1$, функционал может быть записан в виде

$$\Phi_{31}(a_0, \ldots, a_{NM-1}) =$$
$$= \frac{\alpha}{h^2} \left[\sum_{J=0}^{M-1} \sum_{I=0}^{N-2} (a_{I+1,J} - a_{I,J})^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-2} (a_{I,J+1} - a_{I,J})^2 \right] =$$
$$= \frac{\alpha}{h^2} \left[\sum_{J=0}^{M-1} \sum_{I=0}^{N-2} (a_{i+1+jN} - a_{i+jN})^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-2} \left(a_{i+(j+1)N} - a_{i+jN} \right)^2 \right] = \quad (2.12)$$
$$= \frac{\alpha}{h^2} \left[\Lambda_1(a_0, \ldots, a_{NM-1}) + \Lambda_2(a_0, \ldots, a_{NM-1}) \right].$$

В зависимости от номера k, коэффициент a_k может входить либо в одно слагаемое каждой суммы, либо в два слагаемых. Это следует иметь ввиду при дифференцировании суммы по коэффициентам a_k и приведении подобных.

Для того, чтобы найти минимум этого функционала, запишем систему линейных уравнений:

$$\frac{\partial \Phi_{31}(a_0, \ldots, a_{NM-1})}{\partial a_k} = \quad (2.13)$$
$$= \frac{\alpha}{h^2} \left[\frac{\partial \Lambda_1(a_0, \ldots, a_{NM-1})}{\partial a_k} + \frac{\partial \Lambda_2(a_0, \ldots, a_{NM-1})}{\partial a_k} \right] = 0.$$

Множитель $\frac{\alpha}{h^2}$ вынесем из системы уравнений так, чтобы он находился перед матрицей, т.е. матричное уравнение будет иметь вид

$$\frac{\alpha}{h^2} Ax = 0,$$

где $\frac{\alpha}{h^2}A$ - матрица, получаемая при минимизации функционала Φ_{31}, x - вектор неизвестных коэффициентов $a_0, \ldots, a_{NM-1}$.

Запишем, из каких элементов будет состоять матрица A. Дифференцируя Λ_1 по a_k можно выписать следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda_1}{\partial a_k} = a_k - a_{k+1} = 0, \quad k = 0,\ N,\ 2N, \ldots,\ (M-1)N, \\ \dfrac{\partial \Lambda_1}{\partial a_k} = -a_{k-1} + a_k = 0, \\ \qquad\quad k = N-1\ , 2N-1,\ , 3N-1, \ldots,\ NM-1, \\ \dfrac{\partial \Lambda_1}{\partial a_k} = -a_{k-1} + 2a_k - a_{k+1} = 0, \quad \text{для прочих } k \in [0, NM-1]. \end{cases} \tag{2.14}$$

Таким же образом выпишем все уравнения, возникающие при дифференцировании Λ_2:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda_2}{\partial a_k} = a_k - a_{k+N} = 0, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ N-1, \\ \dfrac{\partial \Lambda_2}{\partial a_k} = -a_{k-N} + a_k = 0, \\ \qquad k = N(M-1),\ N(M-1)+1,\ \ldots,\ NM-1, \\ \dfrac{\partial \Lambda_2}{\partial a_k} = -a_{k-N} + 2a_k - a_{k+N} = 0, \quad \text{для прочих } k \in [0, NM-1]. \end{cases} \tag{2.15}$$

Для формирования полной системы уравнений необходимо перебрать все номера k от 0 до $NM-1$. Для каждого k найдется по одному уравнению из (2.14) и (2.15), сложив которые получим k-ое уравнение системы.

Система уравнений $Ax = 0$ будет состоять из множества уравнений перечисленных ниже типов:

$$\begin{aligned} 2a_{k,k} - a_{k,k+1} - a_{k,k+N} &= 0, \\ -a_{k,k-N} + 2a_{k,k} - a_{k,k+1} &= 0, \\ -a_{k,k-1} + 2a_{k,k} - a_{k,k+N} &= 0, \\ -a_{k,k-N} - a_{k,k-1} + 2a_{k,k} &= 0, \\ -a_{k,k-N} + 3a_{k,k} - a_{k,k+1} - a_{k,k+N} &= 0, \\ -a_{k,k-N} - a_{k,k-1} + 3a_{k,k} - a_{k,k+N} &= 0, \\ -a_{k,k-1} + 3a_{k,k} - a_{k,k+1} - a_{k,k+N} &= 0, \\ -a_{k,k-N} - a_{k,k-1} + 3a_{k,k} - a_{k,k+1} &= 0, \\ -a_{k,k-N} - a_{k,k-1} + 4a_{k,k} - a_{k,k+1} - a_{k,k+N} &= 0, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где первый индекс i элемента $a_{i,j}$ означает номер строки в матрице, а второй (j) - номер коэффициента в сумме (2.7). Таким образом получаем матрицу размерности $NM \times NM$. Размерность матрицы равна количеству неизвестных коэффициентов a_k, число которых равно количеству узлов равномерной сетки. На главной диагонали матрицы находятся положительные числа, в остальных местах либо отрицательные числа, либо нули. Матрица симметричная и обладает ленточной структурой. Множители перед элементами $a_{i,j}$ являются элементами матрицы, находящиеся в j-ом столбце i-ой строки. Эти элементы матрицы обозначим как c_{ij}.

Можно показать, что матрица, состоящая из строк вида (2.16) вырождена.

Доказательство. Для этого достаточно показать, что определитель этой матрицы равен нулю. Преобразуем первый столбец матрицы к столбцу, состоящему из нулевых элементов.

Для этого воспользуемся следующим свойством матрицы: сумма всех ненулевых коэффициентов в любой строке равна нулю. Это видно из (2.16), если сложить все множители, стоящие при элементах a_{ij}. Следовательно, любой столбец определителя оказывается линейной комбинацией остальных столбцов, что и доказывает теорему. □

Из доказанного утверждения следует, что задача минимизации замыкающего функционала имеет неединственное решение и не может решаться независимо от функционалов, минимизируемых на предыдущих стадиях.

Некоторые из коэффициентов $a_k, k = 0, \ldots, NM-1$ могли быть определены из минимизации предыдущих функционалов и минимум функционала (2.12) находится при условии достижения минимума предыдущими функционалами, т.е. будет решаться другая система линейных уравнений.

В случае, если функционалы последовательности, которые были минимизированы на предыдущих стадиях, не зависят от оставшихся неизвестными коэффициентов, то при минимизации функционала (2.12) можно избежать использования метода неопределенных множителей Лагранжа и решать систему линейных уравнений (2.20). При этом поступаем следующим образом:

1. Замыкающий функционал будем дифференцировать только по тем коэффициентам a_k, которые остались неизвестными.

2. Найденные ранее коэффициенты исключим из полученной системы линейных уравнений, изменив правую часть этой системы.

Рассмотрим случай, когда из минимизации предыдущих функционалов найден только один коэффициент и его номер равен m. Тогда для того, чтобы перейти от матрицы (2.20) к новой матрице, достаточно вычеркнуть из матрицы системы уравнений (2.20) строку с номером m, а столбец с номером m (что соответствует отсутствию дифференцирования по переменной a_m), перенести в правую часть с противоположным знаком, умножив на значение коэффициента a_m.

Теорема 2.3.2. *Матрица, составленная из строк вида (2.16) после вычеркивания из нее k-ой строки и k-го столбца становится* ***положительно определенной****.*

Доказательство. Докажем, что матрица, удовлетворяющая условиям теоремы будет *невырождена*. После вычеркивания из матрицы произвольно взятой k-ой строки и k-го столбца, со строками матрицы могут произойти следующие изменения:

1. Из строки вычеркнулся нулевой недиагональный элемент, т.е. для нее будет выполняться равенство

$$|c_{kk}| = \sum_{i \neq k} |c_{ik}|.$$

2. Из строки вычеркнулся один ненулевой недиагональный элемент. Тогда для этой строки будет верно неравенство

$$|c_{kk}| > \sum_{i \neq k} |c_{ik}|.$$

Воспользуемся следующим известным утверждением (В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов, 1984):

Утверждение. Для того, чтобы матрица $A = \{c_{ij}\}$ была невырожденной, достаточно выполнения неравенств

$$|c_{ii}||c_{jj}| > \sum_{p \neq i} |c_{ip}| \sum_{p \neq j} |c_{jp}|$$

для всех $i \neq j$.

В качестве строки с номером j зафиксируем ту строку, у которой в результате исключения из матрицы k-го столбца один недиагональный элемент был перенесен в правую часть. Тогда, согласно утверждению, матрица будет невырожденной, т.к.

$$\begin{aligned} &\text{из} \quad |c_{ii}| = \sum_{p\neq i} |c_{ip}| \Rightarrow |c_{ii}||c_{jj}| > \sum_{p\neq i} |c_{ip}| \sum_{p\neq j} |c_{jp}|, \\ &\text{из} \quad |c_{ii}| > \sum_{p\neq i} |c_{ip}| \Rightarrow |c_{ii}||c_{jj}| > \sum_{p\neq i} |c_{ip}| \sum_{p\neq j} |c_{jp}|, \end{aligned} \tag{2.17}$$

т.к.

$$|c_{jj}| > \sum_{j\neq p} |c_{jp}|.$$

Для доказательства **положительной определенности** матрицы исследуем ее спектр при помощи следующей теоремы (В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов, 1984):

Теорема (Гершгорин). Любое собственное значение матрицы $A = \{c_{ij}\}$ лежит по крайней мере в одном из кругов

$$|\lambda - c_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |c_{ij}|.$$

Согласно теореме и структуре исследуемой матрицы, можно записать следующие неравенства относительно спектра:

$$|\lambda - 4| \leq 4,$$

$$|\lambda - 3| \leq 3,$$

$$|\lambda - 2| \leq 2,$$

откуда следует, что интервал, в котором могут находится точки спектра есть $\lambda \in [0, 8]$. Однако, в силу невырожденности матрицы ноль не может принадлежать спектру, откуда следует, что точки спектра лежат в интервале $\lambda \in (0, 8]$. Следовательно матрица является положительно определенной. □

Следствие 2.3.3. *Матрица, составленная из строк вида (2.16) после вычеркивания из нее K строк и столбцов с одинаковым номером является* ***положительно определенной****.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы, за тем исключением, что при вычеркивании столбцов из строки в правую часть может быть перенесено несколько недиагональных элементов, что, однако, сохраняет неравенство

$$|c_{kk}| > \sum_{i \neq k} |c_{ik}|.$$

□

Найденные оценки границ спектра матриц можно использовать в итерационном процессе для решения системы линейных уравнений. Положительная определенность матрицы определяет круг итерационных методов, наиболее подходящих для решения систем линейных уравнений с такими матрицами.

Доказанная положительная определенность является принципиальной при решении алгебраической системы. Во-первых она гарантирует единственность ее решения. Во-вторых, могут использоваться специальные численные методы, учитывающие знание границ спектра. В-третьих, могут применяться итерационные методы, существенно использующие свойство положительной определенности, например метод сопряженных градиентов.

Поле мало отличается от плоскости.

Рассмотрим, как будет минимизироваться второй интеграл в (2.4):

$$\Phi_{32}(a_0, \ldots, a_{NM-1}) = \beta \int\limits_{\Omega} \left[f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \right] dx\, dy \tag{2.18}$$

Смысл этого функционала заключается в том, что поле "мало отличается" от некоторой плоскости. Также, как и для (2.11), запишем дискретный аналог формулы (2.18):

$$\Phi_{32}(a_0, \ldots, a_{NM-1}) =$$

$$= \frac{\beta}{h^4} \sum_{J=0}^{M-1} \sum_{I=0}^{N-3} (a_{I+2,J} - 2a_{I+1,J} + a_{I,J})^2 +$$

$$+ 2\frac{\beta}{h^4} \sum_{J=0}^{M-2} \sum_{I=0}^{N-2} ((a_{I+1,J+1} - a_{I,J+1}) - (a_{I+1,J} - a_{I,J}))^2 +$$

$$+\frac{\beta}{h^4}\sum_{I=0}^{N-1}\sum_{J=0}^{M-3}\left(a_{I,J+2}-2a_{I,J+1}+a_{I,J}\right)^2= \tag{2.19}$$

$$=\frac{\beta}{h^4}\left[\Theta_1(a_0,\ldots,a_{NM-1})+2\,\Theta_2(a_0,\ldots,a_{NM-1})+\Theta_3(a_0,\ldots,a_{NM-1})\right].$$

Для того, чтобы найти минимум этого функционала, запишем систему линейных уравнений:

$$\frac{\partial\Phi_{32}(a_0,\ldots,a_{NM-1})}{\partial a_k}=$$

$$=\frac{\beta}{h^4}\left[\frac{\partial\Theta_1(a_0,\ldots,a_{NM-1})}{\partial a_k}\;+\;2\,\frac{\partial\Theta_2(a_0,\ldots,a_{NM-1})}{\partial a_k}+\right. \tag{2.20}$$
$$\left.+\;\frac{\partial\Theta_3(a_0,\ldots,a_{NM-1})}{\partial a_k}\right]=0.$$

Множитель $\frac{\beta}{h^4}$ вынесем из системы уравнений, матричное уравнение пример вид:

$$\frac{\beta}{h^4}Bx=0,$$

где $\frac{\beta}{h^4}B$ - матрица, получаемая при минимизации функционала Φ_{32}, x - вектор неизвестных коэффициентов $a_0,\ldots,a_{NM=1}$.

По аналогии с минимизацией функционала Φ_{31} выпишем, из каких элементов будет состоять матрица B. Для этого продифференцируем Θ_1, Θ_2 и Θ_3 по a_k:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial a_k}=a_k-2a_{k+1}+a_{k+2}=0, \quad k=0,\ N,\ 2N,\ldots,\ (M-1)N,\\
\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial a_k}=-2a_{k-1}+5a_k-4a_{k+1}+a_{k+2}=0, \quad k=1,\ N+1,\ 2N+1,\ldots,\ (M-1)N+1,\\
\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial a_k}=a_{k-2}-4a_{k-1}+5a_k-2a_{k+1}=0, \quad k=N-2,\ 2N-2,\ 3N-2,\ldots,\ NM-2,\\
\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial a_k}=a_k-2a_{k+1}+a_{k+2}=0, \quad k=N-1,\ 2N-1,\ 3N-1,\ldots,\ NM-1,\\
\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial a_k}=a_{k-2}-4a_{k-1}+6a_k-4a_{k+1}+a_{k+2}=0, \quad \text{для прочих } k\in[0,NM-1].
\end{cases} \tag{2.21}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Theta_2}{\partial a_k} = a_0 - a_1 - a_N + a_{N+1} = 0, \quad k = 0, \\ \dfrac{\partial\Theta_2}{\partial a_k} = a_{2N-2} - a_{2N-1} - a_{N-2} + a_{N-1} = 0, \quad k = N-1, \\ \dfrac{\partial\Theta_2}{\partial a_k} = -a_{N(M-2)} + a_{N(M-2)+1} + a_{N(M-1)} - a_{N(M-1)+1} = 0, \quad k = N(M-1), \\ \dfrac{\partial\Theta_2}{\partial a_k} = a_{N(M-2)+(N-2)} - a_{N(M-2)+(N+1)} - a_{NM-2} + a_{NM-1} = 0, \quad k = NM-1, \\ \dfrac{\partial\Theta_2}{\partial a_k} = -a_{k-N} + a_{k-N+1} + 2a_k - 2a_{k+1} - a_{k+N} + a_{k+N+1} = 0, \\ \qquad k = N,\ 2N,\ 3N, \ldots,\ N(M-2), \\ \dfrac{\partial\Theta_2}{\partial a_k} = a_{k-N-1} - a_{k-N} - 2a_{k-1} + 2a_k + a_{k+N-1} - a_{k+N} = 0, \\ \qquad k = 2N-1,\ 3N-1,\ 4N-1, \ldots,\ N(M-1)-1, \\ \dfrac{\partial\Theta_2}{\partial a_k} = -a_{k-1} + 2a_k - a_{k+1} + a_{k+N-1} - 2a_{k+N} + a_{k+N+1} = 0, \\ \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,\ N-2, \\ \dfrac{\partial\Theta_2}{\partial a_k} = a_{k-N-1} - 2a_{k-N} + a_{k-N+1} - a_{k-1} + 2a_k - a_{k+1} = 0, \\ \qquad k = N(M-1)+1, N(M-1)+2, \ldots,\ N(M-1)+(N-2), \\ \dfrac{\partial\Theta_2}{\partial a_k} = a_{k-N-1} - 2a_{k-N} + a_{k-N+1} - 2a_{k-1} + \\ \quad + 4a_k - 2a_{k+1} + a_{k+N-1} - 2a_{k+N} + a_{k+N+1} = 0, \\ \qquad \text{для прочих } k \in [0, NM-1]. \end{cases} \tag{2.22}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Theta_3}{\partial a_k} = a_k - 2a_{k+N} + a_{k+2N} = 0, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ N-1, \\ \dfrac{\partial\Theta_3}{\partial a_k} = -2a_{k-N} + 5a_k - 4a_{k+N} + a_{k+2N} = 0, \quad k = N,\ N+1,\ N+2, \ldots,\ 2N-1, \\ \dfrac{\partial\Theta_3}{\partial a_k} = a_{k-2N} - 4a_{k-N} + 5a_k - 2a_{k+N} = 0, \\ \qquad k = N(M-2),\ N(M-2)+1,\ N(M-2)+2, \ldots,\ (N-1)M-1, \\ \dfrac{\partial\Theta_3}{\partial a_k} = a_k - 2a_{k+N} + a_{k+2N} = 0, \\ \qquad k = N(M-1),\ N(M-1)+1,\ N(M-1)+2, \ldots,\ NM-1, \\ \dfrac{\partial\Theta_3}{\partial a_k} = a_{k-2N} - 4a_{k-N} + 6a_k - 4a_{k+N} + a_{k+2N} = 0, \quad \text{для прочих } k \in [0, NM-1]. \end{cases} \tag{2.23}$$

Система линейных уравнений формируется по тому же принципу, что и система для функционала Φ_{31}: необходимо перебрать все номера k и для каждого k найдется по одному уравнению из (2.21),(2.22) и (2.23). Сложив эти уравнения, получим k-ое уравнение системы.

Практические эксперименты с системой линейных уравнений показали, что система становится **положительно определенной** при вычеркивании трех строк и столбцов из системы уравнений. Геометрически это можно объяснить так: для однозначного задания плоскости в пространстве необходимо задать три точки, не лежащие на одной прямой. Плоскость является точным решением задачи интерполяции по трем интерполяционным точкам, не лежащим на одной прямой, с замыкающим функционалом (2.4). Вычеркивание трех строк и столбцов говорит о том, что три коэффициента уже определены. Эти коэффициенты и задают плоскость. Верхнюю границу интервала, в котором находится спектр матрицы B можно оценить максимальным из чисел, получающемся при суммировании всех элементов в строке (или столбце), взятых по модулю. Строка, у которого такая сумма будет максимальной получается при сложении последних строк в каждой из формул (2.21),(2.22) и (2.23). Если сложить все множители, находящиеся перед a_k взятые по модулю, то оценка для верхней границы спектра матрицы B запишется так:

$$\lambda_{max} \leq 64,$$

или, учитывая положительную определенность матрицы

$$0 < \lambda \leq 64.$$

2.4. Развитие методов решения разреженных алгебраических систем большой размерности.

2.4.1. Недостатки прямых методов решения систем, возникающих при обработке геологических и геофизических данных.

Рассмотрим для примера задачу решения системы алгебраических уравнений

$$Ax = f \tag{2.24}$$

с разреженной, ленточной, положительно определенной матрицей A размерности $N \times N$. Для метода ПМФ это может означать, что решается задача построения карты на сетке, состоящей из $\sim N$ узлов.

Рассмотрим, что даст применение классического метода Гаусса к решению системы (2.24). Вектор неизвестных коэффициентов x имеет размерность N, поэтому прямое применение метода Гаусса к решению системы (2.24) потребует $\sim 2/3N^3 + N^2$ операций (Н.С. Бахвалов и др., 1987). При этом обязательно потребуется хранить матрицу системы линейных уравнений в памяти компьютера. Для этого потребуется N^2 слов памяти, способных сохранить одно число с требуемой точностью. Для решения задачи (2.24) с $N \approx 3000$ на современных компьютерах метод Гаусса применять не целесообразно, т.к. время счета составляет порядка 15 минут.

Для решения системы (2.24) могут быть применены прямые методы с исключением операций, связанных с нулевыми элементами матрицы A (метод Гаусса, метод квадратного корня, методы отражений и вращений). Пусть s - ширина ленты матрицы A, тогда общее число операций для решения системы уравнений (2.24) будет величиной порядка $O(Ns^2)$ (Н.С. Бахвалов и др., 1987). Однако, применение таких методов по прежнему требует хранение матрицы в памяти.

Идеально подходят для решения системы (2.24) итерационные стационарные методы (не изменяющие матрицу системы уравнений в процессе итераций). Их преимущества очевидны:

1. Отпадает необходимость хранения матрицы в памяти. Элементы матрицы можно высчитывать по небольшому набору формул.

2. Итерационные алгоритмы, в отличие от прямых методов, могут учитывать найденное "хорошее" начальное приближение для решения (2.24).

3. Некоторые итерационные алгоритмы учитывают характерные особенности матричных операторов системы уравнений. К таким особенностям можно отнести: положительную определенность матрицы, оценки границ спектра, другую априорно известную информацию о спектре (например, области сгущения точек спектра).

Простые по структуре матрицы, рассмотренные в §2.3 однозначно определяют выбор класса численных методов для решения системы: *они должны быть итерационными и стационарными.*

2.4.2. Итерационный метод блуждания по спектру (МБС).

Исходя из того, что наиболее эффективным для решения систем линейных уравнений большой размерности будет метод, учитывающий особенности матрицы этой этой системы, была сделана попытка сконструировать метод, который бы учитывал априорную информацию о спектре матрицы.

Известно, что простейшим методом решения линейных операторных уравнений вида

$$(aI - A)x = f, \tag{2.25}$$

где a - некоторое число, I - тождественный и A - линейные операторы, x - решение уравнения, а f - его правая часть, является метод простой итерации. Этот метод можно получить из уравнения (2.25), перенося величину Ax в правую часть, деля результат на a и присваивая неизвестной последовательные номера i и $i-1$. В результате метод примет вид:

$$X_i = \frac{1}{a}\left(f + AX_{i-1}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.26}$$

X_0 - произвольное начальное приближение, часто принимаемое равным правой части. Этот итерационный процесс можно модернизировать вводя релаксационный параметр z. В результате получится следующая итерационная формула:

$$X_i = \frac{1}{a-z}\left[f + (A + zI)X_{i-1}\right] \tag{2.27}$$

Обычно опытные вычислители подбирают этот параметр экспериментально для частного примера, добиваясь некоторого улучшения сходимости, а затем используют этот параметр для расчета других типичных задач.

Идея данного метода заключается в разработке правила задания переменного релаксационного параметра, зависимого от номера итерации. В этом случае итерационный процесс примет вид:

$$X_i = \frac{1}{a-z_i}\left[f + (A - z_iI)X_{i-1}\right] \tag{2.28}$$

Релаксационный параметр в данном исследовании будет связан со спектром оператора A. Предполагается различная информированность о спектре: от максимальной, когда известен весь спектр и кратность каждого собственного числа, до минимальной, когда мы знаем только то, что спектр находится на действительной оси, слева или справа от точки a и ограничен некоторым числом. В частности, можно знать только границы $[m, M]$ спектра оператора A.

Разработанный ниже метод, учитывающий ту или иную степень информированности о спектре, назван методом блуждания по спектру. Отметим, что известны работы, в которых эта идея в той или иной мере реализована. Например, в работах В.И.Лебедева (В.И. Лебедев, 2000) в итерационном процессе осуществлен учет информации о границах спектра и предложена схема, позволяющая учитывать известную информацию о том, что спектр расположен на нескольких отрезках действительной оси. В работе В.Н.Кутрунова (В.Н. Кутрунов, 1992) разработан операторный метод полинома наилучшего приближения, также учитывающий информацию о границах спектра. В работе М.В.Дмитриевского (М.В. Дмитриевский, В.Н. Кутрунов, 1998) построен итерационный метод операторного полинома наилучшего приближения на комплексном спектре.

Предположим, что операторное уравнение (2.25) имеет единственное решение. Нетрудно видеть, что итерационные процессы (2.26)-(2.28) будут иметь это решение единственной неподвижной точкой. Действительно, подставив в эти итерационные процессы точное решение, можно убедиться после упрощения, что они преобразуются в уравнение (2.25). Для применения этих процессов к решению остается убедиться, что итерационные процессы оказываются сходящимися.

Пусть опертор A - матрица простой структуры размерности $(n \times n)$. Предположим, что нам известны все n точек спектра оператора A. Покажем, что точное решение итерационного процесса (2.28) можно получить ровно за n итераций:

Теорема 2.4.1. *Пусть A - нормальная матрица, имеющая n собственных значений кратности* 1, *тогда точное решение матричного уравнения* $(aI - A)x = f$ *можно записать ровно за n итераций.*

Доказательство. Матричные уравнения будем решать с помощью итерационного процесса (2.28), причем в качестве последовательности релаксационных параметров z_i выберем последовательность собственных чисел $\{\lambda_i\}$ оператора A. Через φ_i обозначены собственные вектора. Так как эта система собственных векторов линейно-независима, то она может быть выбрана за базис в n-мерном евклидовом пространстве.

Разложим правую часть уравнения $(aI - A)x = f$ по базису $\{\varphi_k\}$:

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k.$$

Если взять за начальное приближение $x_0 = f$, то итерационый процесс (2.28) приведет к следующей последовательности приближенных решений:

$$X_1 = \frac{1}{a-\lambda_1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k + \sum_{k=2}^{n} a_k\,(\lambda_k-\lambda_1)\varphi_k\right),$$

$$X_2 = \frac{a_1\varphi_1}{a-\lambda_1} + \frac{a_2\varphi_2}{a-\lambda_2} + \frac{1}{a-\lambda_1}\sum_{k=3}^{n}\varphi_k + \sum_{k=3}^{n}\frac{(\lambda_k-\lambda_1)\,(\lambda_k-\lambda_2)}{(a-\lambda_1)\,(a-\lambda_2)}a_k\varphi_k,$$

$$\ldots,$$

$$X_n = \frac{a_1\varphi_1}{a-\lambda_1} + \frac{a_2\varphi_2}{a-\lambda_2} + \ldots + \frac{a_n\varphi_n}{a-\lambda_n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k\varphi_k}{a-\lambda_k}.$$

Легко показать, что последний результат является точным решением.

Действительно, подставляя в уравнение (2.25) решение и правую часть в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\varphi_k$, $f = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$ и приравнивая коэффициенты при соответствующих векторах базиса, получим коэффициенты b_k и точное решение примет вид:

$$x = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a-\lambda_k}\varphi_k.$$

□

Эту теорему можно обобщить для случая, когда кратность собственных значений больше или равна 1:

Теорема 2.4.2. *Пусть A - нормальная матрица размерности n, имеющая p собственных значение кратностей $k_1, \ldots, k_p$, причем $\sum\limits_{i=1}^{p} k_i = n$, тогда точное решение матричного уравнения $(aI - A)x = f$ можно записать ровно за p итераций.*

Следующий искусственный вариант заключается в предположении, что собственные числа известны с фиксированной погрешностью ε, т.е. в итерационном процессе вместо последовательностей релаксационных параметров z_i будут подставляться числа $\lambda_i - \varepsilon$.

Следует отметить, что на рисунке m, M - границы спектра оператора A. Из общих соображений известно, что матричное уравнение (2.25) будет иметь единственное решение, если спектр расположен справа или слева от точки a.

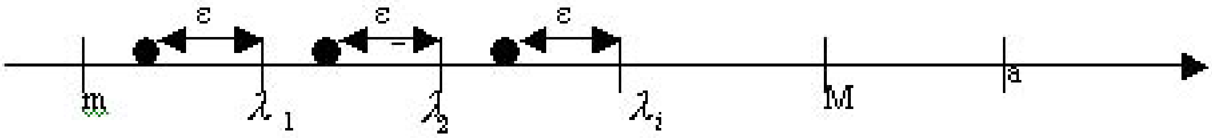


Рис. 2.3.

В данном случае итерационный процесс (2.28) запишется:

$$X_i = \frac{1}{a-(\lambda_i-\varepsilon)}\left[f+(A-(\lambda_i-\varepsilon)\,I)X_{i-1}\right].$$

Так как точное решение является неподвижной точкой итерационного процесса для любого релаксационного параметра, то для дальнейшего его можно записать в виде:

$$X = \frac{1}{a-(\lambda_i-\varepsilon)}\left[f+(A-(\lambda_i-\varepsilon)\,I)X\right].$$

Для оценки погрешности требуется оценить разность между точным и приближенным решением, которая с учетом двух предыдущих формул запишется в виде:

$$\begin{aligned} X-X_{i+1} = &\frac{1}{a-(\lambda_{i+1}-\varepsilon)}[(A-(\lambda_{i+1}-\varepsilon)I)X- \\ &-f-(A-(\lambda_{i+1}-\varepsilon)I)X_i] = \\ =&\frac{1}{a-(\lambda_{i+1}-\varepsilon)}\left[A(X-X_i)-(\lambda_{i+1}-\varepsilon)\,(X-X_i)\right]. \end{aligned}$$

Разложим разность между точным решением и начальным приближением по собственным векторам (не нарушая общности, коэффициенты разложения можно считать равными единице): $X-X_0=\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k$, тогда итерационный процесс сводится к следующей последовательности вычислений:

$$\begin{aligned} X-X_1 = &\frac{1}{a-(\lambda_1-\varepsilon)}\left[\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k-(\lambda_1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\right] \\ =&\sum_{k=1}^{n}\frac{(\lambda_k-\lambda_1+\varepsilon)}{a-\lambda_1+\varepsilon}\varphi_k, \end{aligned}$$

$$X - X_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\lambda_k - \lambda_2 + \varepsilon)}{a - \lambda_2 + \varepsilon}\psi_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(\lambda_k - \lambda_2 + \varepsilon)}{(a - \lambda_2 + \varepsilon)} \frac{(\lambda_k - \lambda_1 + \varepsilon)}{(a - \lambda_1 + \varepsilon)}\varphi_k,$$

$$X - X_i = \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{i} \frac{(\lambda_k - \lambda_j + \varepsilon)}{(a - \lambda_j + \varepsilon)}\varphi_k,$$

причем $i \leq n$, т.е. число итераций не больше размерности пространства. Результат последней итерации можно записать в виде:

$$X - X_i = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k, \text{где} \quad c_k = \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_k - \lambda_j + \varepsilon}{a - \lambda_j + \varepsilon}.$$

Из рисунка 2.3 видно, что $a - \lambda_j + \varepsilon \neq 0$ ни для какого ε, т.к. $a - \lambda_j > 0$.

Назовем "глобальной" итерацией n итераций, однократно использующих всю совокупность релаксационных параметров. Если выполнить одну "глобальную" итерацию, то $c_k = \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{\lambda_k - \lambda_j + \varepsilon}{a - \lambda_j + \varepsilon}$ причем если $\varepsilon = 0$, то $c_k = 0$ т.к. в числителе произведения для каждого k обязательно встретится разность равных собственных чисел. Следовательно $X - X_n = 0$ и X_n оказалось точным решением. Для $\varepsilon \neq 0$ получается приближенное решение.

Проведем еще одну "глобальную" итерацию, т.е. еще раз используем последовательность чисел $(\lambda_i - \varepsilon)$ в качестве релаксационных параметров, а за начальное приближение выберем результат предыдущей "глобальной" итерации. Тогда

$$X - X_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k, \text{ где } \quad b_k = \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_k - \lambda_j + \varepsilon}{a - \lambda_j + \varepsilon}\right)^2.$$

Учитывая, что $\lambda_k < a$ получим $\frac{\lambda_k - \lambda_j + \varepsilon}{a - \lambda_j + \varepsilon} < 1$. Отсюда следует, что сходимость итерационного процесса обеспечивается независимо от ε. Кроме того т.к. одна из разностей $(\lambda_k - \lambda_i)$ будет равна нулю, то из произведения может быть вынесен сомножитель $(\varepsilon/[a - \lambda_k + \varepsilon])^2$.

Пусть g - число глобальных итераций, $g \geq 1$, тогда коэффициенты приближенного решения имеют следующий вид:

$$b_k = \left[\frac{\varepsilon}{a - \lambda_k - \varepsilon}\right]^g \left(\prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{\lambda_k - \lambda_j + \varepsilon}{a - \lambda_j + \varepsilon}\right)^g$$

откуда видно, что итерационный процесс сходится покоординатно, причем оба сомножителя меньше единицы и параметр ε оказывается управляющим параметром итерационного процесса. Действительно если ε мало, то сходимость очень быстрая, а если $\varepsilon = 0$, то непосредственно видно, что получается точное решение уже за один полный проход.

Пример.

Все описанные выше эффекты можно проиллюстрировать на очень простом примере, в котором за оператор A берется диагональная матрица. Решим матричное уравнение вида (2.25), где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a = 4.$$

В этой задаче одна "глобальная" итерация эквивалентна пяти итерациям, поэтому в примерах далее будет выполняться ровно по пять итераций.

1 способ. Метод простой итерации. Воспользуемся формулой (2.26). Она может быть получена из итерационной формулы (2.27) для релаксационного параметра $z = 0$. Разность между точным и приближенным решением будет равна:

$$X_{\text{точное}} - X_{\text{прибл}} = \begin{pmatrix} -0.0007 \\ 0 \\ 0.0008 \\ -0.0156 \\ 0.0260 \end{pmatrix}.$$

2 способ. Метод простой итерации с релаксационным параметром $z = -3$. Снова используется формула (2.27). Вектор погрешности после пяти итераций равен

$$X_{\text{точное}} - X_{\text{прибл}} = \begin{pmatrix} -0.0406 \\ 0 \\ -0.0015 \\ -0.0930 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3 способ. Метод блуждания по спектру. Используется итерационная формула (2.28) с релаксационным набором параметров, являющимся вектором из собственных чисел матрицы A: $z_i = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. После пяти итераций получаем точное решение, т.е.

$$X_{\text{точное}} - X_{\text{прибл}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

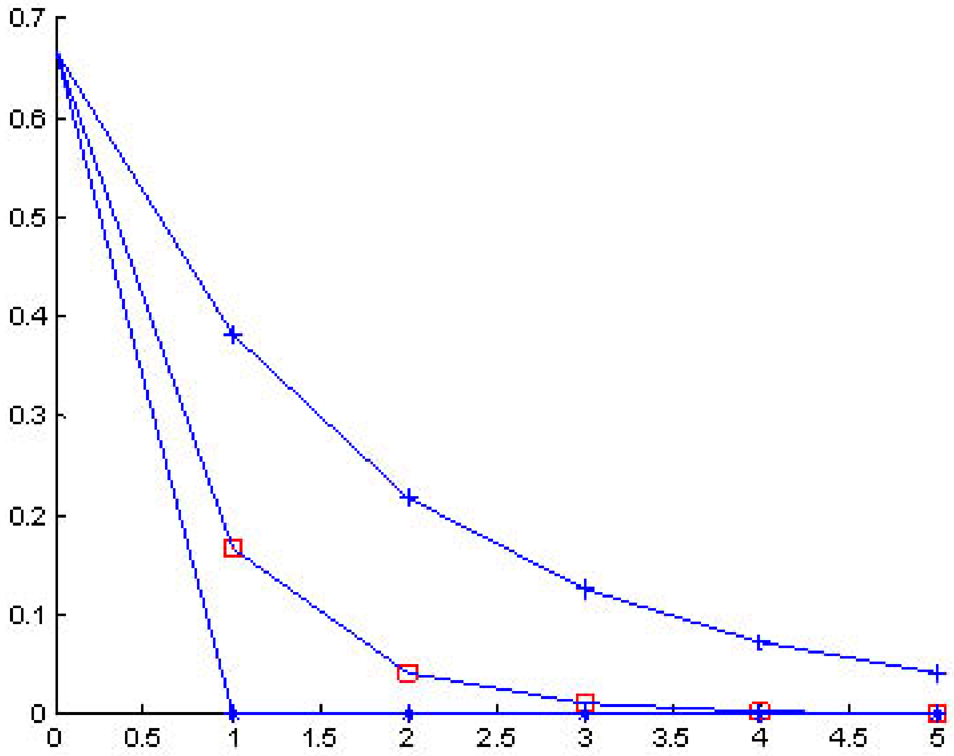


Рис. 2.4.

На рисунке 2.4 изображены нормы разностей между точным и приближенным решениями (ось OY) на соответствующем шаге итерационного процесса (ось OX). Три линии соответсвуют трем вышеописанным способам решения. Линия с квадратами - это первый способ, с крестиками - второй, а со звездочками третий. Как видно из графика третий способ является самым эффективным за счет использования информации о спектре. Метод простой итерации оказался более эффективным, чем метод простой итерации с релаксационным параметром $z = -3$ за счет того, что точка $z = 0$ оказалась более близкой к "центру"спектра. При использовании всего одного параметра релаксации можно получить еще более точный результат если по границам спектра определить его центр и полученное число взять за параметр релаксации.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пусть необходимо решить уравнение вида $(aI - A)x = f$, где A - нормальная матрица размерности 20×20 со спектром, расположенным в двух областях - около 0 и около -50. Пусть число $a = 60$.

Зададим спектр оператора A значениями, записанными в таблице 2.1. Нормальная матрица A строится способом, изложенным в §2 приложения, как нормальная матрица в евклидовом пространстве с фиксированным спектром.

0.3000 - 0.1467i	-49.7000 - 0.1467i
0.3000 + 0.1467i	-49.7000 + 0.1467i
0.0000 - 1.1216i	-50.0000 - 1.1216i
0.0000 + 1.1216i	-50.0000 + 1.1216i
0.1000 - 4.4329i	-49.8000 - 4.6676i
0.1000 + 4.4329i	-49.8000 + 4.6676i
0.2000 - 4.6676i	-49.6000 - 6.6405i
0.2000 + 4.6676i	-49.6000 + 6.6405i
0.4000 - 6.6405i	-49.9000 - 4.4329i
0.4000 + 6.6405i	-49.9000 + 4.4329i

Таблица 2.1. Спектр матрицы А, сосредоточенный в двух областях.

Количество итераций, затрачиваемое МБС равно 12, а метод простой итерации дает 67 итераций. Это происходит потому, что для МБС в процессе итераций релаксационный параметр z_i принимает поочередно значения 0 и -50, учитывая тем самым априорную информацию о том, что спектр оператора A сосредоточен в двух областях.

Рассмотрим теперь случай, когда нам приближенно известен лишь промежуток, в котором расположены все точки спектра. Пусть по прежнему рассматривается задача (2.25), но оператор A зададим спектром из

-49.0000	-44.0000
-48.0000	-43.0000
-47.0000	-42.0000
-46.0000	-41.0000
-45.0000	-40.0000

Таблица 2.2. Спектр матрицы А, сосредоточенный в отрезке.

таблицы 2.2.

Зададим приближенно интервал расположения спектра $[-50; -40]$. Пусть релаксационный параметр z_i для МБС меняется круговой перестановкой чисел $z = \{-50, -45, -40\}$, тогда метод сходится за 5 итераций. Если решать операторное уравнение (2.25) методом простой итерации (2.26), то он сойдется за 57 итераций. Если использовать модернизированный метод простой итерации (2.27), в котором положить $z = -45$ (примерный центр интервала расположения спектра), то он сойдется за 6 итераций.

Из этого примера следует, что если нам известна некая дополнительная информация о спектре, то ее правильное использование дает значительный выигрыш в счете.

Как правило, информация о спектре бывает неизвестна. В этом случае используются косвенные методы для определения какой-то ее части. Приведем пример на эту тему. По разработанной ранее схеме сконструируем нормальную матрицу 50 порядка со спектром, расположенным на отрезке [-50,-40] (рис. 2.4). Пусть $a = 60$. Из общих теоретических соображений известно, что спектр расположен на комплексной плоскости в круге радиуса $norma(A)$. В нашем случае норму вычисляем по одной из формул, принятых в n-мерном пространстве $norma = \max\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| = 88.5527$. Именно эту информацию о спектре и используем в итерационном процессе (2.28).

Пусть z_i - 30 точек, равномерно распределенных на интервале $[-88.552788.5527]$, причем $z_1 = -88.5527$, $z_2 = -88.5527 + h$, $z_3 = -88.5527 + 3h$, где $h = 5.9035$. Тогда МБС дает 10 итераций, а метод простой итерации дает 61.

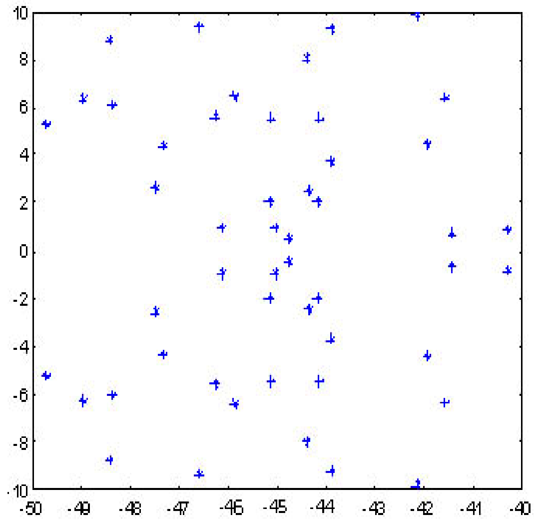


Рис. 2.5.

2.4.3. Разработка скоростного многосеточного итерационного метода, учитывающего специфику построения алгебраической системы.

В процессе построения карт с высокодетальной сеткой приходится решать системы линейных уравнений большой размерности. С высокодетальными картами можно выполнять следующие операции:

1. **Работа с картой с различными уровнями детализации.** Возникает возможность рассматривать более детально отдельные участки карты и грубо оценивать всю карту. Обычно высокая детальность при рассмотрении всей карты целиком не нужна, а иногда даже вредна, т.к. большой объем информации, содержащейся в высокодетальной карте, требует больших ресурсов компьютера для своего отображения.

2. **Борьба с шумами.** Погрешности вычислений, нежелательные высокочастотные изменения поля можно убрать из карты. Составляющие этой операции - высокодетальная карта и применение техники вейвлет-анализа.

3. **Редактирование карты** может также осуществляться с различными уровнями детальности. Т.е. изменения поля можно вносить как в высокочастотной области (локальные изменения параметра), так и в низкочастотной - "глобальные" изменения.

Более подробно реализация некоторых из вышеперечисленных возможностей описана в §3.1 и §3.2.

Для решения больших систем уравнений, возникающих при построении карт высокой детальности предлагается специальный вычислительный алгоритм, позволяющий решать последовательность задач с матрицами малых размерностей, с пошаговым увеличением размерности в четыре раза. Решение задачи на шаге i является начальным приближением для задачи на шаге $i+1$.

Смысл предлагаемого каскадного алгоритма состоит в последовательном уточнении: в начале строится грубое решение на грубой сетке, а затем с каждым шагом количество узлов сетки увеличивается в четыре раза (в два раза по каждой оси). Найденное грубое решение используется в качестве начального приближения при решении следующей системы алгебраических уравнений. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута нужная точность и требуемое количество узлов сетки.

Общая схема построения систем линейных алгебраических уравнений на основе минимизации последовательности функционалов была предложена в §2.1. Эта схема не зависит от количества точек грида. Этим фактом можно воспользоваться для конструирования скоростного итерационного процесса решения систем алгебраических уравнений, которые получаются при выборе сетки с очень большим числом узлов. Один шаг итерации заключается в построении и решении системы на грубой сетке и фиксации полученного решения в качестве начального приближения для задачи с более мелкой сеткой. Удобнее (алгоритмичнее) всего задать соотношение между грубой и более точной сетками уменьшением шага по осям OX и OY вдвое. Получающуюся на каждом шаге алгебраическую систему можно решать любым известным подходящим итерационным методом, в частности, учитывать особые, конкретные свойства матрицы.

Рассмотрим задачу расчета карты некоторого геолого-геофизического параметра. Пусть необходимо рассчитать значения картируемого параметра в узлах равномерной сетки, которая находится в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$ и состоит из NM узлов, где N - количество узлов по оси OX, M - количество узлов по оси OY. Шаг сетки (расстояние между узлами) равен h:

$$S_{NM} = \left\{ (\overline{x}_k, \overline{y}_l) : \begin{array}{ll} a & = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_{N-1} = b \\ c & = \overline{y}_0 < \overline{y}_1 < \ldots < \overline{y}_{M-1} = d \end{array} \right\}, \tag{2.29}$$

$$\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i = h, \overline{y}_{i+1} - \overline{y}_i = h.$$

Нижний индекс у S_{NM} означает что сетка состоит из NM узлов. Для того, чтобы построить решение на сетке S_{NK} рассмотрим последовательность сеток, организованных по правилу (рис. 2.6):

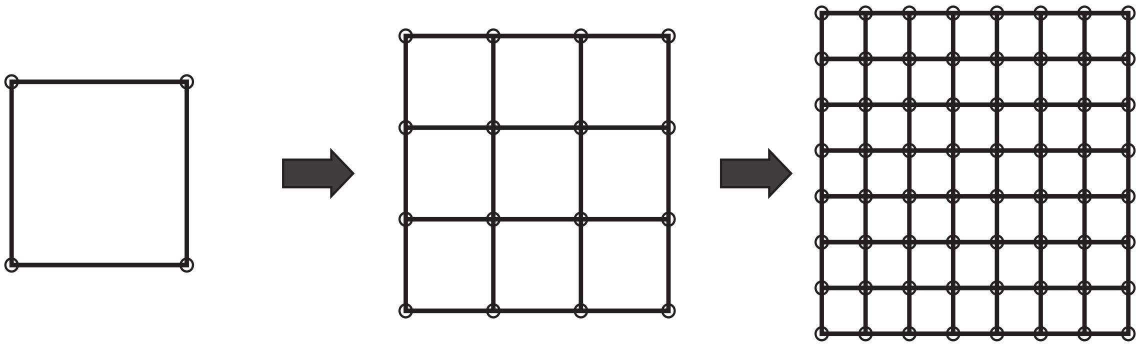


Рис. 2.6. Схема измельчения равномерной сетки.

$$S_{P_0}^0 = \left\{ \begin{array}{rl} (\overline{x}_k{}^0, \overline{y}_l{}^0): \; a & = \overline{x}_0{}^0 < \overline{x}_1{}^0 < \ldots < \overline{x}_{N_0-1}^0 = b \\ c & = \overline{y}_0{}^0 < \overline{y}_1{}^0 < \ldots < \overline{y}_{M_0-1}^0 = d \end{array} \right\},$$

$$S_{P_1}^1 = \left\{ \begin{array}{rl} (\overline{x}_k{}^1, \overline{y}_l{}^1): \; a - \frac{h_0}{2} & = \overline{x}_0{}^1 < \overline{x}_1{}^1 < \ldots < \overline{x}_{N_1-1}^1 = b + \frac{h_0}{2} \\ c - \frac{h_0}{2} & = \overline{y}_0{}^1 < \overline{y}_1{}^1 < \ldots < \overline{y}_{M_1-1}^1 = d + \frac{h_0}{2} \end{array} \right\},$$

$$\vdots$$

$$S_{P_i}^i = \left\{ \begin{array}{rl} (\overline{x}_k{}^i, \overline{y}_l{}^i): \; a - \sum\limits_{j=0}^{i-1} \frac{h_j}{2} & = \overline{x}_0{}^i < \overline{x}_1{}^i < \ldots < \overline{x}_{N_i-1}^i = b + \sum\limits_{j=0}^{i-1} \frac{h_j}{2} \\ c - \sum\limits_{j=0}^{i-1} \frac{h_j}{2} & = \overline{y}_0{}^i < \overline{y}_1{}^i < \ldots < \overline{y}_{M_i-1}^i = d + \sum\limits_{j=0}^{i-1} \frac{h_j}{2} \end{array} \right\},$$

Последовательность сеток $\{S_{P_0}^0, S_{P_1}^1, \ldots, S_{P_m}^m\}$ обладает следующими свойствами:

1. $P_{i+1} = 4P_i$, т.е. у сетки $S_{P_{i+1}}^{i+1}$ количество узлов в четыре раза больше, чем у сетки $S_{P_i}^i$. Также выполняются равенства $N_{i+1} = 2N_i$, $M_{i+1} = 2M_i$, т.е. при переходе к следующей сетке удваивается количество узлов по оси OX и по оси OY.

2. $h_{i+1} = h_i/2$, т.е. с увеличением количества узлов, шаг сетки уменьшается вдвое.

3. Последняя сетка в последовательности та, для которой верны неравенства $N_m >= N$ и $M_m >= M$, т.е. сетка S_{P_m} содержит столько же узлов, сколько сетка S_{NM} или больше.

Для каждой сетки $S^{\,i}_{P_i}$ из построенной последовательности $\{S^{\,0}_{P_0}, S^{\,1}_{P_1}, \ldots, S^{\,m}_{P_m}\}$ поставим в соответствие функциональное пространство V^i из последовательности вложенных пространств $V^0 \subset V^1 \subset \ldots \subset V^m$, организованных по следующим правилам:

1. Задана функция $B^0(x, y) \in V^0$ такая, что множество ее сдвигов $B^0(x - h_0, y - h_0)$ образует ортогональный базис пространства V^0. В качестве базисной функции $B^0(x, y)$ задается функция "ступенька":

$$B^0(x, y) = \varphi^0(x)\psi^0(y),$$

$$\varphi^0(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[a - \dfrac{h_0}{2}, a + \dfrac{h_0}{2}\right) \\ 0, x \notin \left[a - \dfrac{h_0}{2}, a + \dfrac{h_0}{2}\right) \end{cases}, \psi^0(y) = \begin{cases} 1, y \in \left[c - \dfrac{h_0}{2}, c + \dfrac{h_0}{2}\right) \\ 0, y \notin \left[c - \dfrac{h_0}{2}, c + \dfrac{h_0}{2}\right) \end{cases}.$$

$$B^i(x, y) = B^0(2^i x, 2^i y).$$

2. $f(x, y) \in V^i \Leftrightarrow 4 \cdot f(2x, 2y) \in V^{i+1}$;

На рисунке 2.7 изображена схема расположения базисных функций (пунктирными линиями обозначены непересекающиеся носители базисных функций)на равномерной сетке - центр базисной функции всегда приходится на один из узлов равномерной сетки.

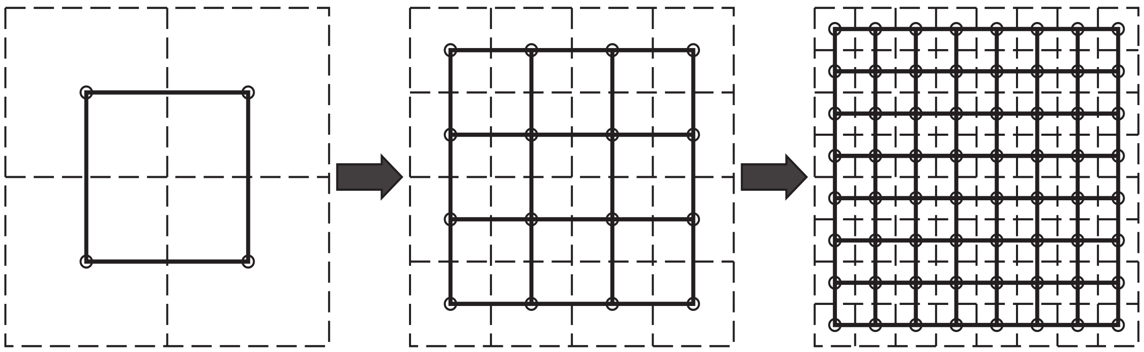


Рис. 2.7. Схема расположения базисных функций на равномерной сетки.

В результате проведенных построений, получили следующее:

1. Последовательность сгущающихся сеток $\{S_{P_0}^0, S_{P_1}^1, \ldots, S_{P_m}^m\}$.
2. Для каждой сетки $S_{P_i}^i$ задано функциональное пространство V^i с набором базисных функций типа "ступенька" $B^i(x,y)$.
3. Значения, рассчитанные в узлах равномерной сетки $S_{P_i}^i$ могут быть представлены функциями $f^j(x,y) \in V^j$, $j >= i$.

Рассмотрим итерационный многосеточный метод, учитывающий специфику построения систем линейных уравнений метода ПМФ. Для расчета значений в узлах равномерной сетки S_{NM} в методе ПМФ решается задача минимизации последовательности функционалов. Эта задача сводится к решению нескольких алгебраических систем линейных уравнений. Для простоты изложения будем рассматривать случай, когда решается одна система линейных уравнений вида $Ax = b$, где A - некоторый матричный оператор, b - правая часть системы, а $x = \{a_0, \ldots, a_{NM-1}\}$ - искомый вектор, в котором содержатся искомые коэффициенты разложения функции

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{NM-1} a_i B_i(x,y).$$

Нулевая итерация многосеточного метода заключается в построении грубого решения

$$f^0(x,y) = \sum_{I=0}^{N_0} \sum_{J=0}^{M_0} a_{I,J}^0 B^0(x + Ih_0, y + Jh_0) \in V^0$$

на грубой сетке $S_{P_0}^0$. Решение строится по методу ПМФ - записывается последовательность функционалов и затем минимизируется. Пусть при этом решается система линейных уравнений вида

$$A_0 x_0 = b_0,$$

где A_0 - матричный оператор, соответствующий данной итерации, b_0 - правая часть системы, а $x = \{a_{IJ}\}$, $I = 0, \ldots, N_0$, $J = 0, \ldots, M_0$. Система линейных уравнений с матрицей A_0 решается очень просто, т.к. размерность матрицы не велика - она того же порядка, что и количество узлов сетки $S_{P_0}^0$.

Все последующие итерации производятся по одной схеме. Рассмотрим итерацию с номером i:

1. Решение $f^{i-1} \in V^{i-1}$, построенное на предыдущем шаге, проецируется в пространство V^i. С учетом ортогональности и локального носителя базисных функций эта операция не составляет сложностей. Каждая базисная функция $B^{i-1}(x,y)$ "распадается" на четыре базисных функции $B^i(x,y)$. Коэффициент, который был при базисной функции $B^{i-1}(x,y)$ записывается и перед четырьмя соответствующими базисными функциями $B^i(x,y)$. Таким образом получаем представление функции $f^{i-1}(x,y)$ в пространстве V^i.

2. В результате получаем начальное грубое приближение для построения $f^i(x,y)$. Применяем метод ПМФ и минимизируем последовательность функционалов. В результате получаем систему линейных уравнений
$$A_i x_i = b_i.$$
Эту систему уравнений решаем любым подходящим итерационным процессом. В качестве начального приближения для итерационного процесса выбираем вектор коэффициентов разложения $f^{i-1} \in V^i$.

3. В результате решения системы $A_i x_i = b_i$ получаем решение $f^i(x,y)$ для сетки $S_{P_i}^{\,i}$.

Такие итерации проделываются для всех сеток из последовательности $\{S_{P_0}^{\,0}, S_{P_1}^{\,1}, \ldots, S_{P_m}^{\,m}\}$.

Предложенный алгоритм показал очень высокую эффективность. В результате его применения стало возможным быстро строить карты на существенно избыточных сетках.

Эксперименты с предложенным численным методом излагаются в §2.5. Также там проведено сопоставление с некоторыми другими методами картопостроения.

2.5. Численные эксперименты восстановления полей с помощью "метода последовательной минимизации функционалов", сравнение с другими пакетами программ.

Для оценки результатов работы метода ПМФ были проведены ряд тестов, иллюстрирующих как хорошее качество рассчитываемых карт, так и высокое быстродействие метода.

№	**Название программы**	**Производитель**	**Время работы**
1.	Surfer 7.0	Golden Software Inc. USA	25 сек.
2.	General Mapping Tools 3.4.3 (GMT)	P. Wessel and W.H.F. Smith. Свободно распространяемый пакет программ	12 сек.
3.	Модуль Редактор 2Д ПК Баспро	ЗАО «ИНК», г. Тюмень	5 мин.
4.	Irap RMS	Roxar, Норвегия	35 мин.
5.	surfit (метод ПМФ)	ТюмГУ Свободно распространяемый пакет программ	5 сек.

Таблица 2.3. Сравнительное время работы различных программ.

2.5.1. Сравнение пакета `surfit` с другими пакетами программ.

Сравним карты, построенные методом ПМФ, реализованным в пакете программ `surfit` с картами, построенными по тем же исходным данным и одинаковой равномерной сетке в промышленных пакетах программ, используемых для построения карт при созданий моделей нефтяных и газовых месторождений в ведущих нефтяных компаниях страны, так и для создания различных карт по всему миру.

В качестве исходных данных были взяты абсолютные отметки подошвы пласта АВ1(1-2) Самотлорского месторождения, замеренные в 13504 скважинах. Все карты строились на равномерной сетке, состоящей из 1024×1024 узлов. Расчеты производились на компьютере с процессом Intel Pentium4. Эксперимент с программой Irap RMS производился на компьютере Sun Blade 1000.

В таблице 2.3 приведено время работы различных программ, затраченное на построение карты. Все карты получились "похожими" в области высокой плотности данных. Существенные различия наблюдаются в области низкой плотности информации и у границ карты.

Отдельно рассмотрим карты, построенные в пакетах Surfer, GMT и surfit.

- **GMT и Surfer**. Для построения карт (рис. 2.8,2.9) был использован метод сплайн-интерполяции с учетом натяжения. Параметр натяжения T_I был задан равным единице. Не смотря на то, что в обеих программах реализован один и тот же метод, на краях карты результаты отличаются друг от друга. Отметим, что в программе Surfer использованный для картопостроения метод оказался единственным, способным в приемлимый срок выдать хорошую карту. При использовании остальных методов изолинии на картах получались ломаными, а время счета было порядка часа. В программе GMT других методов картопостроения не реализовано. В методе сплайн-интерполяции с учетом натяжения, применяемого в этих пакетах, решается дифференциальное уравнение, описывающее положение жесткой упругой пластины, зафиксированной в точках с исходными данными. На краях карты задается граничное условие "свободного края" (W.H.F. Smith, P. Wessel, 1990).

- **surfit**. Среди достоинств карты, построенной методом ПМФ, можно отметить отсутствие точек экстремума и малую изменчивость параметра в областях отсутствия информации. Это связано с тем, что в области отсутствия информации было задействовано предположение о том, что поле мало изменчиво (мало отличается от константы). По времени работы метод ПМФ показал самое высокое быстродействие. Построенную карту можно назвать подобной картам, полученным в программах Surfer и GMT.

Для построения карты в программе "Редактор 2Д" ПК Баспро был применен предлагаемый в работе аналог метода крайгинга. Карта строилась по блокам, что можно заметить по характерным "изломам" изолиний. Задача интерполяции решалась для каждого блока, после чего происходила их "сшивка". Блочное построение было использовано из-за сложности расчета карты целиком: матрица аналога метода крайгинга плотнозаполненная и плохо обусловлена. Расчет всей карты целиком потребовал большое количество оперативной памяти и занял около 1 часа времени. Карта, получившаяся в результате расчета по блокам уступает по качеству картам, построенным в пакетах GMT, Surfer и surfit.

Карту, построенную в программе Irap RMS (рис. 2.12) можно считать непригодной из-за больших изменений параметра вдоль границы карты.

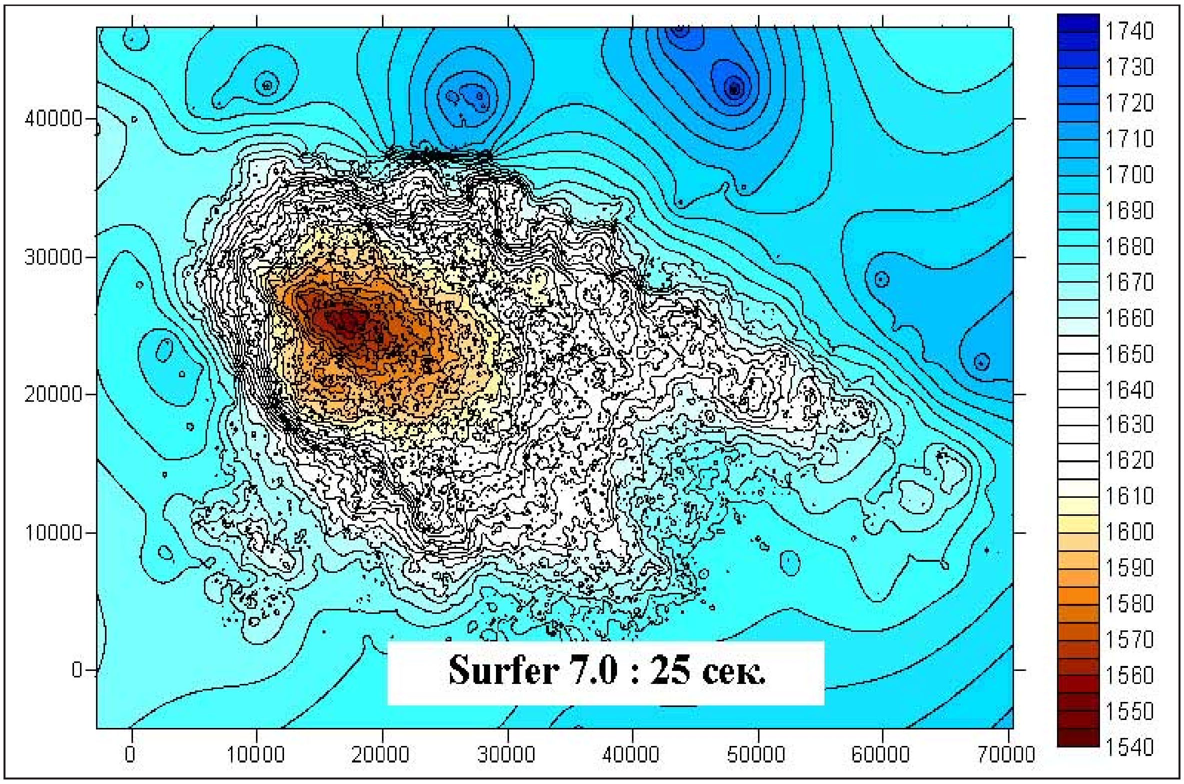


Рис. 2.8. Карта, построенная в программе Surfer 7.0.

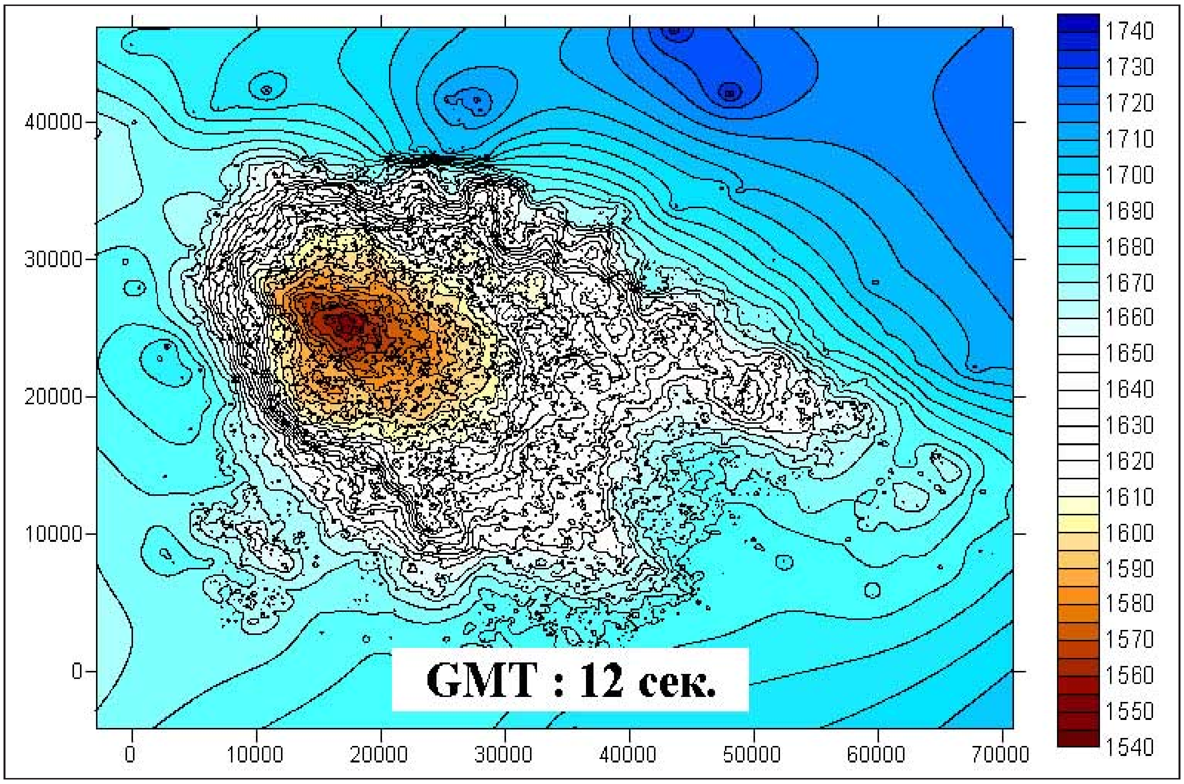


Рис. 2.9. Карта, построенная в программе GMT.

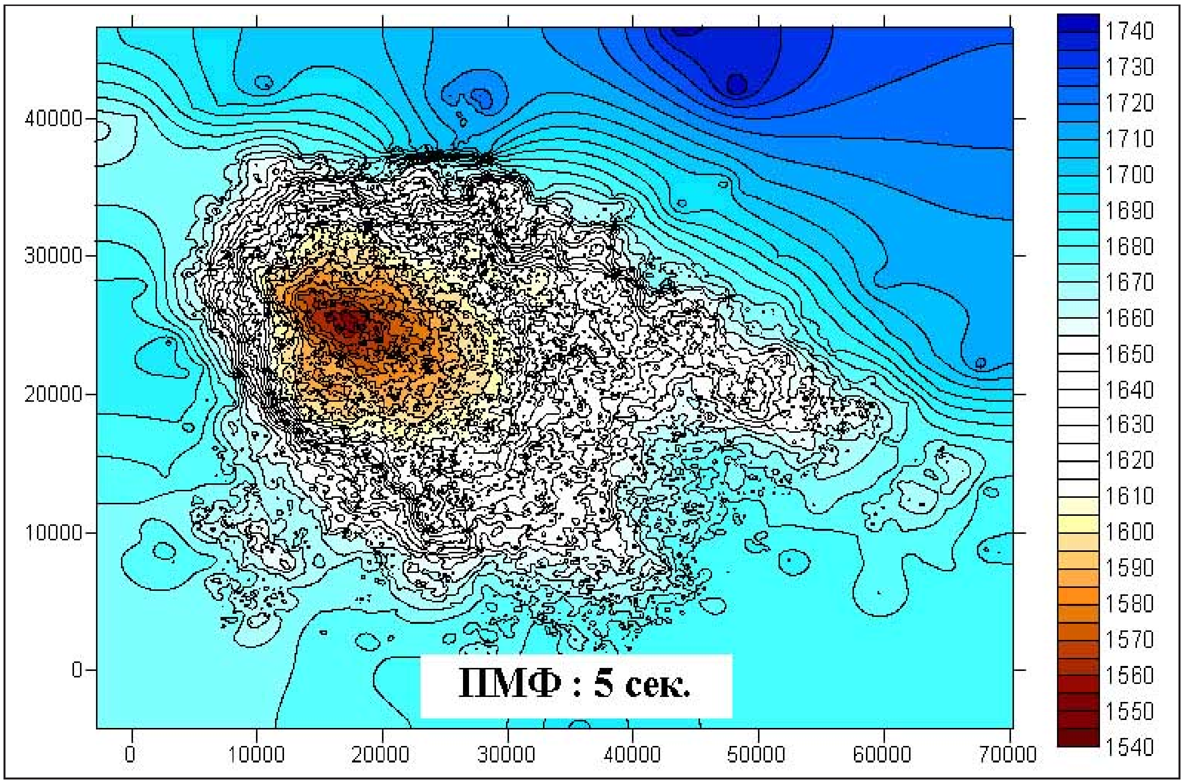


Рис. 2.10. Карта, построенная по методу ПМФ.

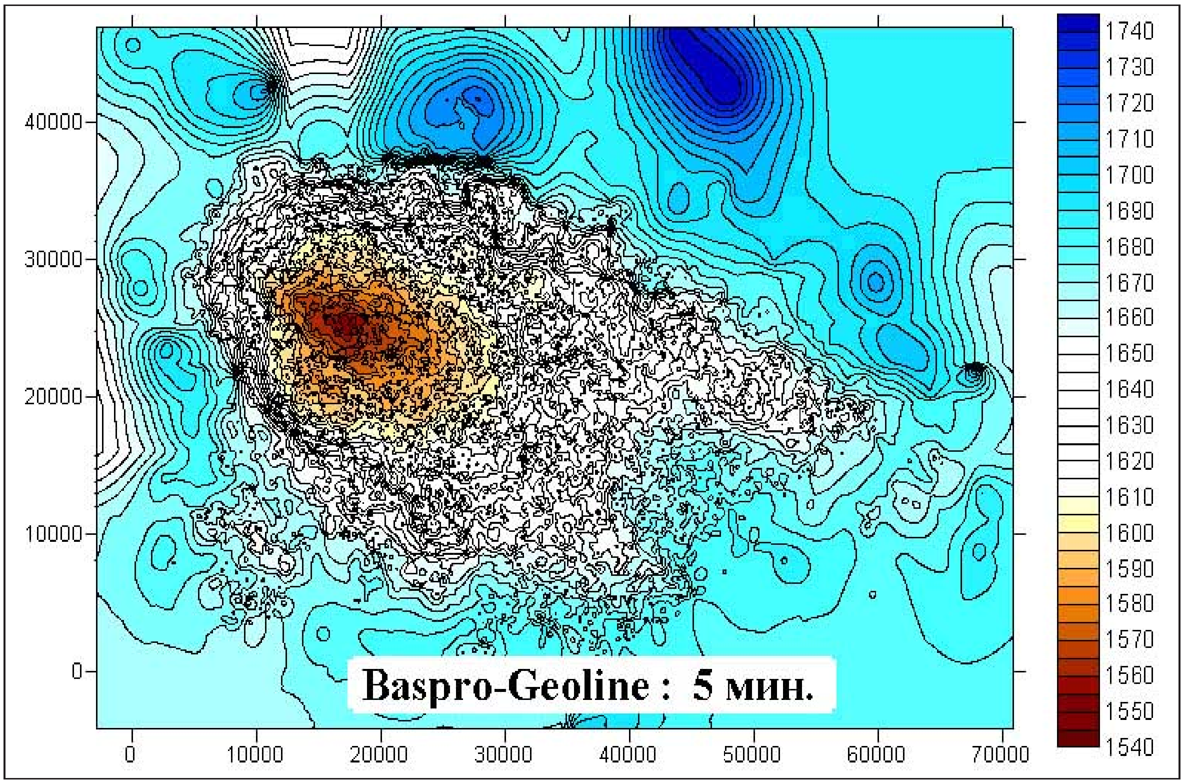


Рис. 2.11. Карта, построенная в программе Baspro-Geoline.

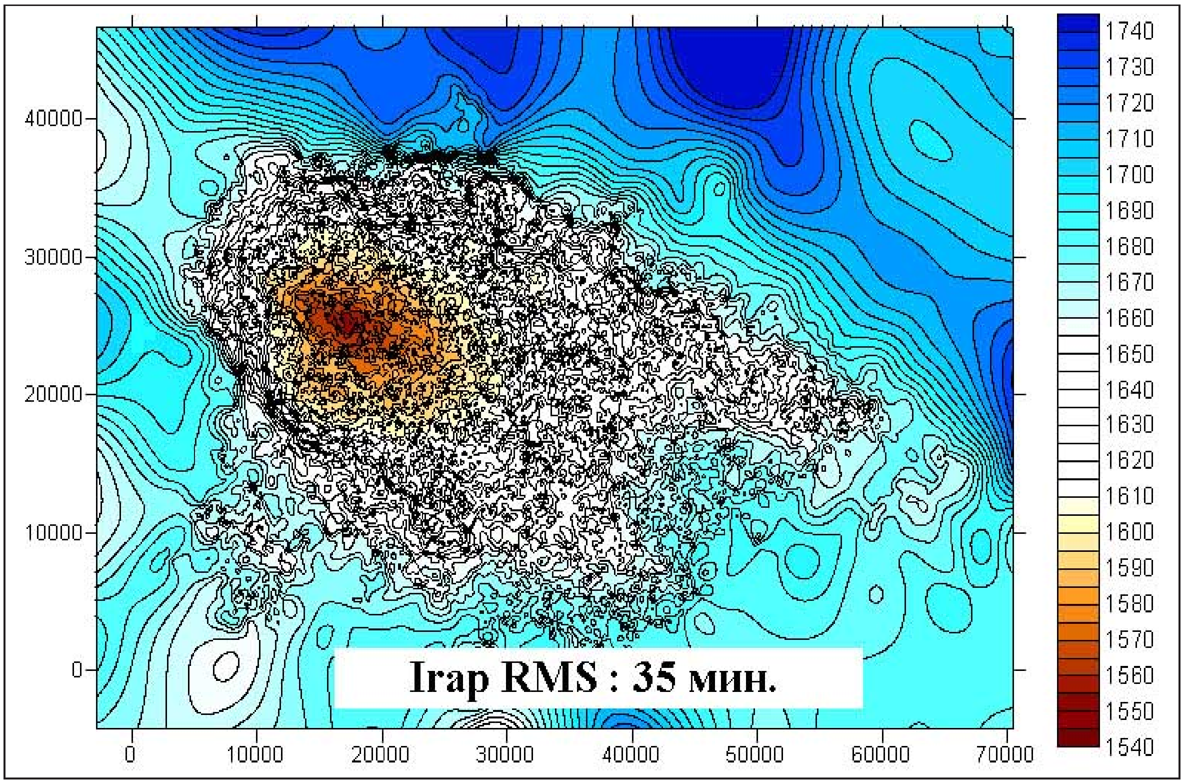


Рис. 2.12. Карта, построенная в программе Irap RMS 7.

Для построения был использован рекомендованный фирмой Roxar метод под названием "mask method". К сожалению, предоставляемая с программой документация не содержит полного описания метода, из которого можно было бы понять почему карта сильно меняется вдоль границы.

На рисунках (рис. 2.13) и (рис. 2.14) изображены разности между картами, построенными различными методами в программах surfit, Surfer и Irap RMS. Цветовая шкала, в которой отображены карты разностей, составлена таким образом, что темными цветами выделяются значения, находящиеся в интервале $[-1.5, 2)$. Эти значения можно считать погрешностью, т.к. их абсолютные величины составляют 1% от интервала изменения картируемого параметра (кровли пласта), равного 200 метрам. Как видно из рисунков, совпадение карт наблюдается в области высокой плотности скважин, расположенных в центре карты. Существенные различия между картами наблюдаются у краев карт и в областях между скважинами.

Для того, чтобы оценить качество карты, построенной тем или иным методом, применяют различные критерии, которые указывают уровень соответствия карты исходным данным. Понятно, что карты, построенные различными интерполяционными методами будут совпадать в области

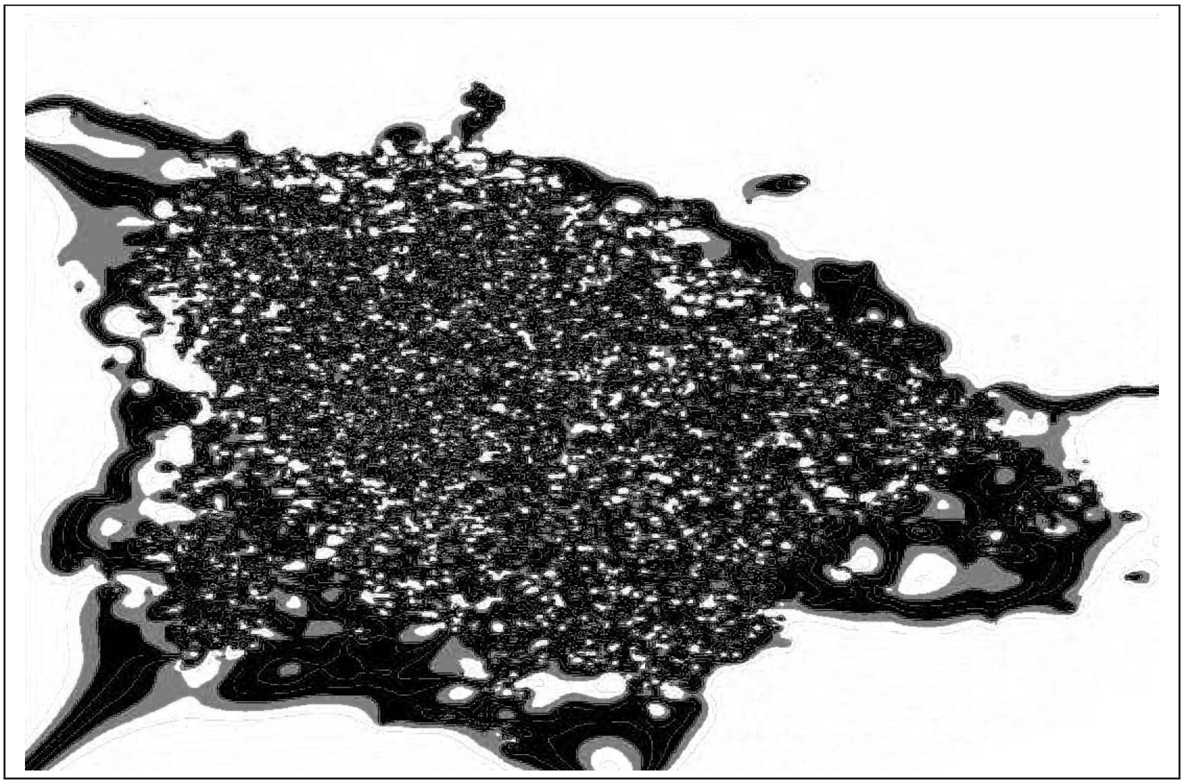


Рис. 2.13. Разность карт, построенных в `surfit` и Surfer 7.0

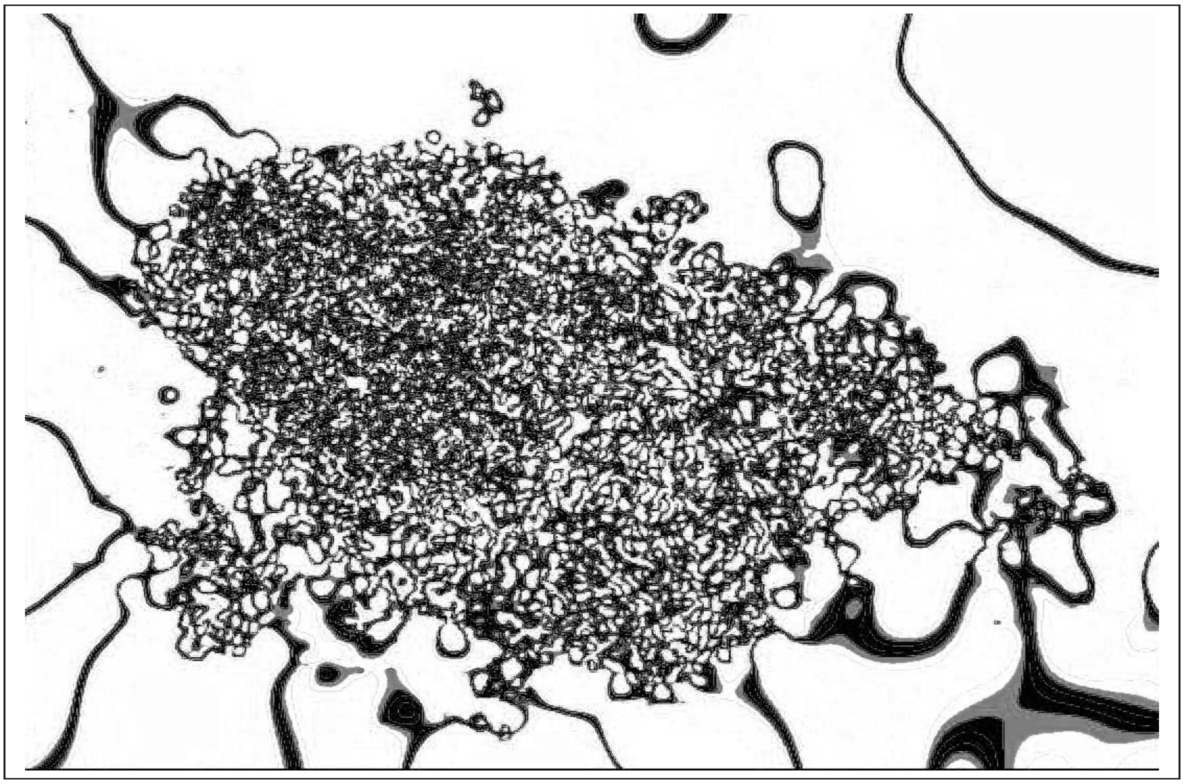


Рис. 2.14. Разность карт, построенных в `surfit` и Irap RMS.

скважин и различаться в области их отсутствия - это происходит из-за того, что каждый метод картопостроения закладывает свою информацию о поведении параметра в области отсутствия исходных данных, т.е. по-сути, добавляет к исходной свою, заложенную в методе, информацию, которая может не иметь ничего общего с представлениями геолога.

Не существует однозначного ответа на вопрос "по какому критерию сравнивать карты" - в каждом отдельном случае необходимо применять специальный критерий, или даже серию критериев. Пусть для построения произвольной карты исследователь сформировал последовательность критериев, по которым он будет оценивать качество карт. Общепринятый подход к построению карт заключается в том, что карты строятся всевозможными доступными пользователю методами, а затем из полученных карт выбирается одна - та, которая больше всего удовлетворяет критериям. Карты, построенные различными методами, будут в большей или меньшей степени удовлетворять предложенной последовательности критериев. Предлагаемый ниже подход меняет эту ситуацию: карта сразу строится с учетом выбранных критериев. Используется метод последовательной минимизации функционалов (§2.1): каждый критерий записывается в виде некоторого функционала, при этом наиболее важные критерии записываются в первую очередь, а наименее важные - в последнюю. Согласно методу, карта строится из минимизации полученной последовательности функционалов. Полученная в результате карта будет наилучшим образом соответствовать критериям с учетом значимости каждого критерия.

2.5.2. Учет разнородной информации в методе ПМФ.

В качестве другого теста метода ПМФ рассмотрим результаты картопостроений, выполненных при построении модели Токского месторождения. На рис. 2.15 отображены две карты кровли пласта Т1 Токского месторождения, построенные по различным наборам исходных данных.

- Карта справа построена с учетом данных в скважинах (значений абсолютной отметки кровли пласта) и информации, налагаемой на поведение поля в области отсутствия скважинных данных. При построении карты последовательно минимизировалось два функционала: функционал, аппроксимирующий значения в скважинах и замыкающий функционал, реализующий предположение о том, что поле мало отличается от некоторой плоскости.

- Карта слева построена построена с учетом данных в скважинах, учет результатов сейсмической поверхности, заданной в виде грида, и информации, налагаемой на поведение поля в области отсутствия данных. В отличие от карты, изображенной справа, при построении этой карты последовательно минимизировалось три функционала:

  (а). Функционал, аппроксимирующий значения в скважинах.

  (б). Функционал, учитывающий сейсмическую поверхность, заданную в виде грида.

  (в). Замыкающий функционал, реализующий предположение о том, что поле мало отличается от некоторой плоскости.

  Из минимизации замыкающего функционала не было определено ни одного коэффициента, т.к. все коэффициенты удалось определить из минимизации первых двух функционалов последовательности.

Из построенных карт (рис. 2.15) видно, что они описывают один и тот же объект, только карта, расположенная слева содержит в себе большее количество информации, чем карта, расположенная справа.

2.5.3. Построение топографической карты поверхности Земли.

В работе метод ПМФ был применен для обработки гигантского количества информации. Эта задача связана с построением топографической карты земной поверхности. В качестве исходных данных были использованы наборы гридов, содержащих отметки высот земной поверхности и глубин океанов. Информация была предоставлена National Geophysical Data Center (NGDC), США (`http://www.ngdc.noaa.gov`). Эти данные имеют различную информационную достоверность, различный шаг сетки, зачастую по-разному описывают один и тот же участок поверхности. Поэтому эти данные не могут быть объеденены в один большой набор точек для их дальнейшего картирования. Классификация исходных данных по достоверности была построена согласно информации, предоставленной NGDC. Согласно этой классификации минимизировалась последовательность функционалов.

Грид, на котором рассчитывалась карта состоял из 8012×4096 узлов, т.е. шаг сетки был равен $02'40''$ по широте и $02'40''$ по долготе. Время расчета карты на компьютере Intel Pentium4 с 1 гигабайтом оперативной памяти составило 15 минут 38 секунд. Заметим, что раньше подобная карта строилась по блокам, после чего полученные блоки согласовывались между собой.

Для визуализации всей карты целиком и ее отдельных участков была применена техника вейвлет-анализа, описанная в §1.3.2 диссертации. Эта техника позволяет быстро пересчитывать исходную карту для ее отображения с различными уровнями детальности. Большой участок карты (рис. 2.16, слева) отображается на грубой сетке, полученной в результате 4х-кратного вейвлет-преобразования исходной карты. Карта, отображающая меньший участок поверхности содержит большее количество деталей, т.к. при этом визуализируется грид, получнный в результате 2х-кратного применения вейвлет преобразования. Процедура пересчета карты с одного уровня детальности на другой происходит практически мгновенно.

2.6. Перспективы "метода последовательной минимизации функционалов" для решения задач трехмерного моделирования полей геологических и геофизических параметров.

Предложенный метод ПМФ будет эффективным и в случае построения трехмерных моделей нефтяных месторождений. При переходе к трехмерному моделированию можно отметить следующие положительные стороны предлагаемой методики, применительно к построению больших и сложных моделей:

- **Использование равномерной сетки.** По сравнению с неравномерной сеткой, использование равномерной сетки позволяет существенно сократить объем памяти для хранения ее узлов и повысить скорость вычисления их координат. Эта экономия быстродействия и объема памяти делает возможным использование более мелких (избыточных) сеток.

- **Выбор простейшей базисной функции** для алгоритма расчета равномерной сетки. Выбор «ступеньки» в качестве базисной функции представляется наиболее эффективным с точки зрения вычислений, производимых на компьютере. Алгоритм расчета сетки в этом случае получается быстродействующим и не требует больших затрат объемов оперативной памяти, а следовательно можно решать очень большие задачи.

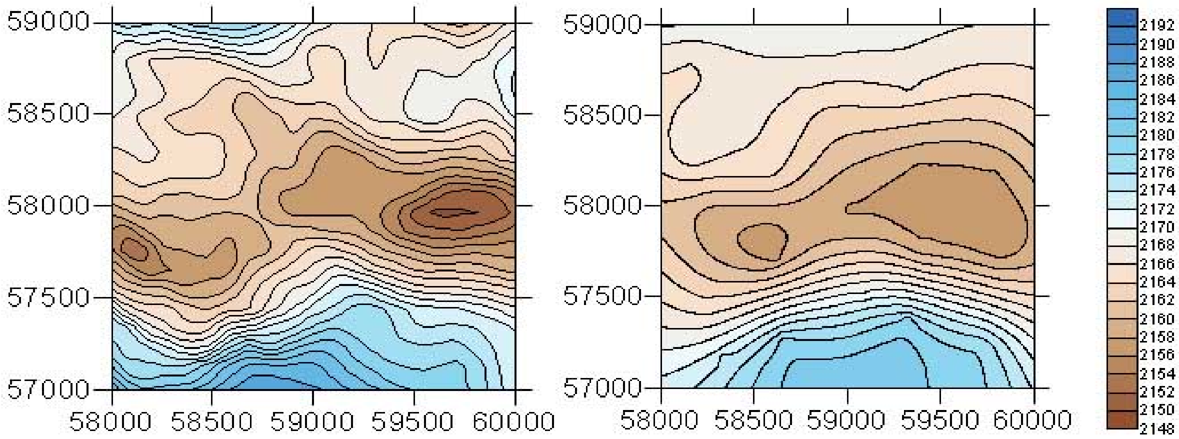


Рис. 2.15. Карты с учетом и без учета сейсмики.

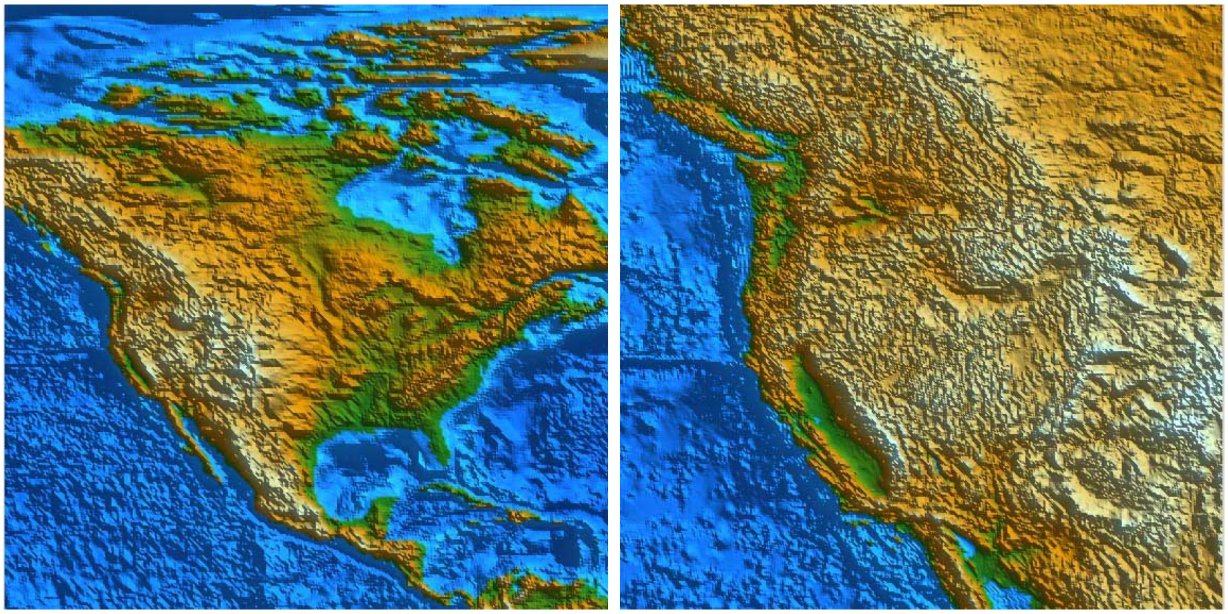


Рис. 2.16. Представление карты с различными уровнями детальности.

№	Название источника	Размер грида	Шаг сетки
1.	Italy	1280 × 1500	00′30″ × 00′30″
2.	Austria	130 × 244	01′30″ × 02′30″
3.	Netherlands	80 × 60	03′00” × 05′00”
4.	Madagascar	1801 × 901	00′30″ × 00′30”
5.	Haiti	481 × 1321	00′30″ × 00′30”
6.	U.S.A.	3240 × 8160	00′30″ × 00′30”
7.	Greenland	295 × 391	05′00″ × 10′00″
8.	Africa	900 × 984	05′00″ × 05′00″
9.	Europe	540 × 1140	05′00″ × 05′00″
10.	America	684 × 996	05′00″ × 05′00″
11.	Canada	61 × 397	05′00″ × 05′00″
12.	Andes Mountains	560 × 360	03′00″ × 03′00″
13.	Brazil Cerrados	690 × 750	02′00″ × 02′00″
14.	Australia	409 × 505	05′00″ × 05′00″
15.	Japan	156 × 240	05′00″ × 05′00″
16.	ETOPO5 bathymetry	2016 × 4320	05′00″ × 05′00″
17.	FNOC topography	1080 × 2160	10′00″ × 10′00″

Таблица 2.4. Исходные данные для топографической карты поверхности Земли, их классификация по достоверности.

- **Использование простых функционалов** для вычисления значений в области неопределенности. Так, в приведенной выше записи функционала (2.4) использовалась простая мысль - от поля требовалось, чтобы касательные к поверхности были по возможности горизонтальными. Это требование приводит к минимизации интеграла от квадратов первых производных по области построения карты. В случае ступенчатой функции интеграл заменяется на сумму квадратов конечно-разностного представления первых производных. Предположение о том, что поле является горизонтальной плоскостью может следовать из геологических представлений. Таким же простым языком необходимо описывать и другие априорные предположения и заменять их соответствующими функционалами. Например, легко представить себе функционал, который бы требовал бы от искомой поверхности, чтобы она походила на некоторую уже известную поверхность. Для этого нужно чтобы касательные в соответствующих точках мало отличались друг от друга.

- **Вычисление коэффициентов матриц по формулам.** При большом количестве N узлов равномерной сетки, хранение матриц размерности $N \times N$ соответствующих систем линейных уравнений в памяти, может оказаться невозможным из-за больших размеров получающихся матриц. Поэтому очевидным выходом является вычисление коэффициентов матриц по формулам. В случае использования равномерной сетки и базисной функции типа «ступенька» формулы получаются очень простыми, а сами матрицы редко заполненными.

- **Разбиение задачи расчета равномерной сетки на отдельные задачи** - расчет в области наличия информации и области неопределенности позволяет значительно сократить общее время счета и повысить эффективность алгоритма. Простая реализация такого разделения исходной задачи возможна благодаря выбору базисной функции типа «ступенька».

- **Применение специальных итерационных методов для решения систем линейных уравнений.** Использование дополнительной информации о спектре в специально разработанных итерационных методах решения СЛУ позволяет повысить скорость их сходимости.

- **Переопределенность трехмерной модели для выбора оптимальной сетки.** Эффективность предложенных алгоритмов и низкие требования к объему оперативной памяти компьютера позволят строить трехмерные модели с сеткой с мелким шагом, т.е. с большой избыточностью. Избыточность здесь может быть рассмотрена как положительное качество, т.к. по запросу пользователя построенную модель можно будет пересчитать на другую сетку с более крупным шагом, таким, который будет достаточен для отображения или обработки информации. Благодаря избыточности любой локальная часть модели может быть рассмотрена с высокой степенью детализации. Издержки как по времени, так и по финансовым затратам на построение избыточной сетки оказываются незначительными.

- **Использование эффективных алгоритмов пересчета равномерной сетки с одного уровня на другой.** Применение техники вейвлет-преобразования (работа со ступенчатыми функциями) позволяет наиболее эффективно производить пересчет равномерных сеток (их огрубление). Также легко реализуется возможность "убирать"высокочастотные составляющие (шум) из построенной модели. В силу дискретного способа хранения и обработки информации в компьютере алгоритмы вейвлет-преобразования оказываются наиболее быстродействующими.

2.7. Оптимизация метода крайгинга обработки геолого-геофизической информации.

2.7.1. Классическая постановка метода крайгинга.

Один из хорошо известных методов, решающих задачу использования дополнительных знаний исследователя о восстанавливаемом поле - метод крайгинга. Он построен на основе идей теории вероятностей, а восстанавливаемая функция содержит ряд коэффициентов, которые находятся из условия минимума дисперсии отклонения построенной функции от известных с некоторой погрешностью данных. Существенную роль при выполнении расчетов играет вариограмма, построенная по исходным данным. Построение этой функции предполагает не только наличие этих данных, но также и наличие эмпирического опыта исследователя. По этой и другим причинам ее выбор в какой-то мере оказывается искусством.

Вкратце изложим основные идеи метода обыкновенного крайгинга (М. Давид, 1980). Функцию $\widetilde{f}(x)$, приближающую $f(x)$ будем искать в виде:

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{N} \overline{a}_i(x) y_i. \tag{2.30}$$

Зависимость неизвестных коэффициентов $\overline{a}_i$ от x означает, что для расчета $\widetilde{f}(x)$ в узлах сетки $\{\overline{x}_k\}, k = \overline{1, m}$ потребуется решать задачу (2.30) m раз, т.е. для каждого узла сетки задача решается отдельно, что, несомненно, является недостатком метода.

Рассмотрим задачу расчета $\widetilde{f}(\overline{x}_k)$ в отдельно взятой фиксированной точке $\overline{x}_k$. Для краткости ведем обозначения:

$$f(\overline{x}_k) = \overline{y}_k,$$

$$\widetilde{f}(\overline{x}_k) = \widetilde{\overline{y}}_k,$$

$$\overline{a}_i(\overline{x}_k) = \overline{a}_i,$$

где $\overline{y}_k$ - неизвестные точные значения функции на сетке, $\widetilde{\overline{y}}_k$ - искомые приближенные значения функции в узлах сетки.

В крайгинге исходные данные y_i понимаются как реализация случайного процесса $f(x)$, а весовые коэффициенты $\overline{a}_i$ находятся из минимизации дисперсии отклонения $\widetilde{\overline{y}}_k$ от $\overline{y}_k$:

$$S = E\left[\overline{y}_k - \widetilde{\overline{y}}_k\right]^2 = E\left[\overline{y}_k - \sum_{i=1}^{N} \overline{a}_i y_i\right]^2 \tag{2.31}$$

Расписав выражение (2.31) получим:

$$S = E\overline{y}_k^2 - 2E\overline{y}_k\widetilde{\overline{y}}_k + E\widetilde{\overline{y}}_k^2 =$$

$$= D\overline{y}_k - 2\sum_{i=1}^{N} \overline{a}_i \; cov(\overline{y}_k, y_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \overline{a}_i\overline{a}_j \; cov(y_i, y_j) =$$

$$= K(\overline{y}_k, \overline{y}_k) - 2\sum_{i=1}^{N} \overline{a}_i \; K(\overline{y}_k, y_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \overline{a}_i\overline{a}_j \; K(y_i, y_j), \tag{2.32}$$

где K - ковариационная функция. В крайгинге на $\widetilde{f}(x)$ накладывается серьезное ограничение, заключающееся в предположении стационарности ковариационной функции, т.е. предполагается, что $K(y_i, y_j)$ зависит не от самих значений y_i и y_j, а от расстояния h_{ij} между ними, т.е.

$K(y_i, y_j) = K(h_{ij})$. Таким образом (2.32) запишется:

$$S = K(0) - 2\sum_{i=1}^{N} \overline{a}_i K(h_{ki}) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \overline{a}_i \overline{a}_j \ K(h_{ij}) \qquad (2.33)$$

Для того, чтобы найти коэффициенты $\overline{a}_i$, необходимо минимизировать диперсию (2.33). Продифференцируем ее по $\overline{a}_m$ и полученное выражение приравняем к нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial \overline{a}_m} = -2K(h_{km}) + 2\sum_{j=1}^{N} \overline{a}_j K(h_{mj}) = 0, \quad m = \overline{1, n}. \qquad (2.34)$$

Формулировка задачи крайгинга требует "несмещенности" оценки $\widetilde{f}(\overline{x}_k)$, т.е. что среднее значение $\widetilde{f}(x)$ должно равняться среднему, полученному по исходным данным. Это требование записывается в виде:

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{a}_i = 1 \qquad (2.35)$$

Минимизируя дисперсию (2.33) при условии (2.35) методом неопределенных множителей Лагранжа, получим систему линейных уравнений, отличающейся от системы (2.34)

$$\begin{cases} \overline{a}_1 K(0) + \overline{a}_2 K(h_{12}) + \ldots + \overline{a}_N K(h_{1N}) + \overline{\lambda} = K(h_{1k}) \\ \overline{a}_1 K(h_{12}) + \overline{a}_2 K(0) + \ldots + \overline{a}_N K(h_{2N}) + \overline{\lambda} = K(h_{2k}) \\ \ldots \\ \overline{a}_1 K(h_{1N}) + \overline{a}_2 K(h_{2N}) + \ldots + \overline{a}_N K(0) + \overline{\lambda} = K(h_{Nk}) \\ \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_N = 1 \end{cases} \qquad (2.36)$$

В условиях используемых гипотез вместо ковариационной функции $K(h)$ используют вариограмму $\gamma(h) = K(0) - K(h)$, тогда (2.36) с учетом (2.35) преобразуется к виду:

$$\begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(h_{12}) & \ldots & \gamma(h_{1N}) & 1 \\ \gamma(h_{12}) & \gamma(0) & \ldots & \gamma(h_{2N}) & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma(h_{1N}) & \gamma(h_{2N}) & \ldots & \gamma(0) & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 \\ \ldots \\ \overline{a}_N \\ \overline{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(h_{1k}) \\ \gamma(h_{2k}) \\ \ldots \\ \gamma(h_{Nk}) \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.37)$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\gamma &= \{\gamma(h_{1k}), \gamma(h_{2k}), \ldots, \gamma(h_{Nk})\},\\
\overline{a} &= \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_N\},\\
e &= \{1, 1, \ldots, 1\},\\
y &= \{y_1, y_2, \ldots, y_N\},\\
A &= \{\gamma(h_{ij})\}.
\end{aligned}$$

Тогда систему уравнений (2.37) можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} A & e^T \\ e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a}^T \\ \overline{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^T \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

В соответствии с (2.38) функция (2.30), восстанавливающая поле в узлах сетки также запишется в матричной форме:

$$\widetilde{f}(\overline{x}_k) = y\overline{a}^T, \tag{2.39}$$

где $\overline{a}^T$ - решение системы (2.38) для точки $\overline{x}_k$.

2.7.2. Схема численной оптимизации метода крайгинга.

Как уже отмечалось выше, задачу (2.30) приходится решать для каждой точки $\overline{x}_k$. При большом количестве исходных данных это может вылиться в длительную расчетную процедуру.

В качестве примера можно привести работу (K.E. Kerry, K.A. Hawick, 1998). В этой работе для решения задачи крайгинга используется высокопроизводительный компьютер CM5, оснащенный 128 процессорами с 32 мегабайтами оперативной памяти каждый. Восстановление поля, заданного 4000 точками на сетке 2000x2000 заняло на таком компьютере 1750 минут. Такое большое количество времени потребовалось потому, что пришлось решать систему линейных уравнений размерности 4001x4001 4 миллиона раз! Предлагаемый нами первый этап оптимизации для той же задачи требует решения СЛУ всего два раза.

Воспользуемся блочной структурой матрицы в (2.38). Задачу можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} A\overline{a}^T + e^T\overline{\lambda} = \gamma^T \\ e\overline{a}^T = 1 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы найдем $\overline{a}^T$ и подставим его во второе уравнение:

$$\overline{a}^T = A^{-1}\left(\gamma^T - e^T\overline{\lambda}\right)$$

$$e\overline{a}^T = eA^{-1}\gamma^T - eA^{-1}e^T\overline{\lambda} = 1$$

Найдя $\overline{\lambda}$ и подставляя его в $\overline{a}^T$ можно получить:

$$\overline{\lambda} = \frac{eA^{-1}\gamma^T - 1}{eA^{-1}e^T} \Rightarrow \overline{a}^T = A^{-1}\gamma^T - \frac{eA^{-1}\gamma^T - 1}{eA^{-1}e^T}A^{-1}e^T$$

Тогда (2.39) запишется:

$$\widetilde{f}(\overline{x}_k) = yA^{-1}\gamma^T - \frac{eA^{-1}\gamma^T - 1}{eA^{-1}e^T}yA^{-1}e^T \tag{2.40}$$

Транспонируя (2.40) и учитывая симметрию матрицы A, получим:

$$\widetilde{f}(\overline{x}_k) = \gamma A^{-1}y^T - \frac{\gamma A^{-1}e^T - 1}{eA^{-1}e^T}eA^{-1}y^T \tag{2.41}$$

Отсюда видно, что для нахождения $\widetilde{f}(\overline{x}_k)$ необходимо дважды обратить матрицу A, а именно, найти вектора $A^{-1}y^T$ и $A^{-1}e^T$, что значительно ускоряет процесс вычислений. Количество обращений матрицы A теперь не зависит от числа узлов сетки.

2.7.3. Аналог метода крайгинга.

Следующая проблема, которая рассматривается в этой работе связана с попыткой построения метода, аналогичного крайгингу, однако построенного на идеях функционального анализа и разложении функций по базисам в соответствующих пространствах. Необходимость в этом заключается в попытке объяснить смысл вариограммы с детерминистских позиций.

Будем искать решение исходной задачи в следующем виде:

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i B_i(x) + \lambda \cdot 1, \tag{2.42}$$

где $B_i(x)$ и 1 - базисные функции. Для нахождения коэффициентов a_i и λ потребуем, чтобы функция $\widetilde{f}(x)$ была интерполирующей, т.е. проходила через исходные данные:

$$\begin{cases} a_1B_1(x_1) + a_2B_2(x_1) + \ldots + a_NB_N(x_1) + \lambda = y_1 \\ a_1B_1(x_2) + a_2B_2(x_2) + \ldots + a_NB_N(x_2) + \lambda = y_2 \\ \ldots \\ a_1B_1(x_N) + a_2B_2(x_N) + \ldots + a_NB_N(x_N) + \lambda = y_N \end{cases} \tag{2.43}$$

Как и в крайгинге, наложим на решение требование "несмещенности" искомой функции $\widetilde{f}(x)$ относительно среднего значения по исходным данным. Это требование имеет вид:

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{2\xi} \int\limits_{-\xi}^{\xi} \widetilde{f}(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} y_i. \tag{2.44}$$

Подставляя в (2.44) выражение (2.42) и (2.43), получим запись этого условия через базисные функции $B_i(x)$ и λ:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{2\xi} \int\limits_{-\xi}^{\xi} B_i(x)dx + \lambda = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N} a_iB_i(x_j) + \lambda\right).$$

В процессе выкладок коэффициент λ сокращается и получается равенство:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \left[\lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{2\xi} \int\limits_{-\xi}^{\xi} B_i(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} B_i(x_j)\right] = 0. \tag{2.45}$$

Предположим для дальнейшего, что выражение в квадратных скобках есть величина не зависящая от номера i. Она может быть постоянной конечной величиной, тогда вынося ее за знак суммы получим условие на коэффициенты

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = 0. \tag{2.46}$$

Если величина в квадратных скобках не зависит от i и при $\xi \to \infty$ стремиться к ∞, то равенство нулю формулы (2.45) также возможно при выполнении условия (2.46).

Следовательно, условие "несмещенности" (2.44) привело к дополнительному уравнению (2.46), которым следует дополнить алгебраическую систему (2.43).

Решение (2.42) и систему (2.43) - (2.46) можно записать в матричной форме:

$$\widetilde{f}(x) = \gamma a^T + \lambda,$$

$$\begin{pmatrix} B & e^T \\ e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^T \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^T \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

где по сравнению с системой алгебраических уравнений метода крайгинга (2.38) в правой части вместо вариограммы γ^T стоят исходные данные y^T. Матрица B составлена из базисных функций, вычисленных в точках, соответствующих координатам исходных данных, тогда как в матрице A на соответствующих местах стоят значения вариограммы. Покажем, что если в системе (2.47) и решении (2.42) в качестве базиса взять вариограмму, то решение задачи (2.30) по методу крайгинга и решение (2.42) по методу (2.47) тождественно совпадут.

Действительно, решим систему (2.47) в предположении, что в ней матрица B заменена на матрицу A. По аналогии с решением (2.38) запишем ответ:

$$\widetilde{f}(\overline{x}_k) = \gamma A^{-1} y^T + \frac{eA^{-1}y^T}{eA^{-1}e^T}\left(1 - \gamma A^{-1} e^T\right) \tag{2.48}$$

Вычтем из решения (2.48) решение (2.41) и покажем, что результат будет нулевым:

$$\gamma A^{-1} y^T + \frac{eA^{-1}y^T}{eA^{-1}e^T}\left(1 - \gamma A^{-1} e^T\right) - \gamma A^{-1} y^T + \frac{\gamma A^{-1}e^T - 1}{eA^{-1}e^T} eA^{-1}y^T =$$

$$= \frac{eA^{-1}y^T}{eA^{-1}e^T}\left(1 - \gamma A^{-1} e^T\right) + \frac{eA^{-1}y^T}{eA^{-1}e^T}\left(\gamma A^{-1} e^T - 1\right) = 0$$

Следовательно, доказано, что если в качестве базиса в постановке (2.42) взять базис сдвига, получаемый из вариограммы путем ее последовательного смещения из одной экспериментальной точки в другую точку, то оба метода дадут одинаковый результат. Например, расчет крайгингом на основе программы Surfer 7.0 (c) Golden SoftWare и по методу (2.42), реализованному нами в ИПК "Баспро" в организации "АЦ Сибинкор" (г. Тюмень), дают одинаковые картинки (Рис 2.17).

Время счета этих программ оказалось примерно одинаковым и на несколько порядков меньшим, чем полученное в работе (K.E. Kerry, K.A. Hawick, 1998).

Совпадение результатов основано на нетривиальном предположении о независимости от индекса i выражения

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{2\xi}\int\limits_{-\xi}^{\xi}B_i(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N}B_i(x_j)=F(x). \qquad (2.49)$$

Остается установить, когда это предположение имеет место.

В работе (М. Давид, 1980) в качестве моделей вариограмм приведены следующие функции:

- Линейная модель $\gamma(h)=Ah+B$
- Степенная модель $\gamma(h)=ah^{\lambda}$
- Экспоненциальная модель $\gamma(h)=C_0+C\left[1-\exp\left(-\frac{|h|}{a}\right)\right]$
- Модель де Вийса $\gamma(h)=A\ln(h)+B$
- Сферическая модель $\begin{cases}\gamma(h)=C\left(\frac{3h}{2a}-\frac{h^3}{2a^3}\right)+C_0, \text{ если } h\le a\\ \gamma(h)=C+C_0, \text{ если } h>a,\\ \gamma(0)=0\end{cases}$

Из этих вариограмм базисы сдвига получаются, например, так:

$$B_i(x)=A|x-x_i|+B \qquad \text{(линейная модель)}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае в выражении (2.49) интеграл не будет зависеть от индекса i и, кроме того, он стремится к бесконечности, поэтому

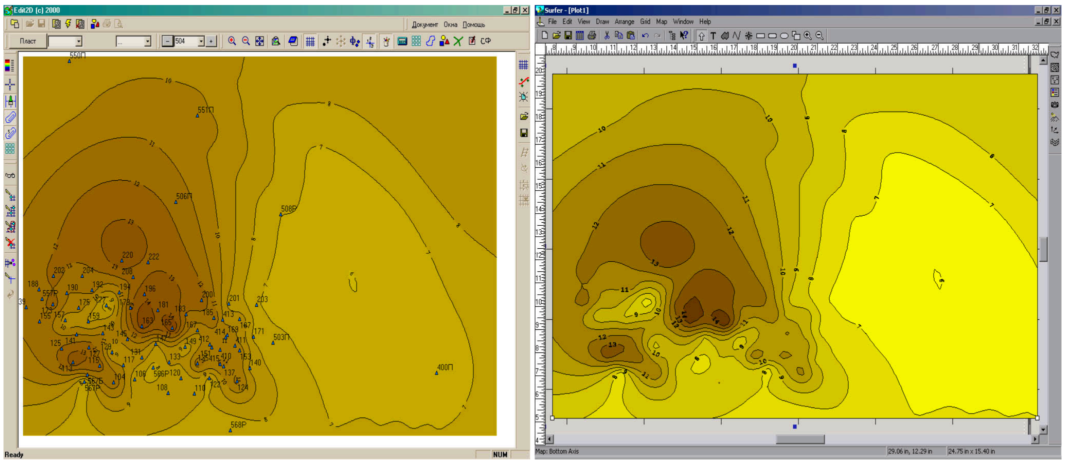


Рис. 2.17. ИПК "Баспро" и Surfer 7.0

вторым конечным слагаемым можно пренебречь, откуда необходимо следует условие (2.46). Аналогичный результат имеет место почти для всех приведенных типов вариограмм и для них верно соотношение (2.46).

Под описанный случай не подходят экспоненциальная и сферическая модели вариограмм. В тоже время численные эксперименты со сферической и экспоненциальной вариограммами и в этом случае дают совпадающие с крайгингом результаты.

Отметим некоторые особенности вариограмм, которые трактуются теперь как порождающие функции для базисов сдвигов. Эти особенности следующие:

- Все они порождают существенно нелокальный базис.
- Некоторые из них являются неограниченными при возрастании аргумента.
- Аргументы вариограмм - всегда расстояния от точки с номером i до произвольной текущей точки.
- Вероятно, вариограммы порождают в некотором смысле оптимальный базис, т.к. их построение опирается на экспериментальные данные задачи.

С другой стороны, поскольку теперь понятно, что вариограмма - это порождающая функция базиса, обладающая указанными выше свойствами, то открываются неограниченные возможности в его конструировании на основе каких-либо других соображений.

Условие $\sum\limits_{i=1}^{N} \overline{a}_i = 1$ в крайгинге не всегда обоснованно. В некоторых работах, например (В.И. Аронов, 1990), считают, что во многих случаях это условие использовать не нужно. В данной работе условие $\sum\limits_{i=1}^{N} a_i = 0$ (2.46) появилось как следствие предположения независимости от индекса выражения (2.49). Если предположить теперь, что выбранный нами базис $B_i(x)$ удобен для решения задачи и в тоже время он не удовлетворяет этому условию, тогда вместо уравнения (2.46) можно использовать условие (2.45). В этом случае совпадения с крайгингом не будет, зато будет точно выполняться условие "несмещенности" и наш метод будет обладать многими чертами крайгинга.

В работе (В.И. Аронов, 1990), стр. 120, утверждается следующее: "В ряде работ большое внимание уделяется выбору типов вариограмм. На самом деле это имеет чисто техническое значение. Вряд ли можно установить общий закон изменчивости на месторождениях, во всяком случае всегда будет неизвестно заранее, выдерживается ли этот закон на новом месторождении. Важно лишь достаточно хорошо аппроксимировать реальную вариограмму, что всегда можно сделать, взяв несколько функций с соответствующими параметрами. Главное заключается в том, насколько в действительности эмпирическая вариограмма близка к истинной."

В этом утверждении автор противоречит себе, утверждая, с одной стороны невозможность хорошего построения вариограммы, а с другой, требуя ее хорошей аппроксимации. Вероятно, автор численно убедился в том, что во многих случаях отсутствует необходимость в качественном подборе вариограмм. С позиций данной работы необходимо лишь, чтобы базис был полным и обладал перечисленными выше свойствами. Достаточное количество базисных функций в решении будет давать удовлетворительный результат.

Наконец, еще одна возможность модернизации метода заключается в том, что средняя величина (интеграл в формуле (2.45)) может вычисляться для конечной области. Это среднее может равняться также среднему значению взятому, например, с тренда, а не полученному по исходным данным.

Из сопоставления двух методов со всей определенностью очевидно, что метод крайгинга является интерполяционным методом, несмотря на его аппроксимационную постановку (он получен как следствие минимизации дисперсии).

3. Методы визуализации геологической и геофизической информации.

Задачи визуализации полей геолого-геофизических параметров, а также классические методы их решения рассмотрены в §1.3.2.

3.1. Применение техники вейвлет-анализа для работы с картами с различными уровнями детальности.

Вейвлет-анализ имеет массу практических приложений: в компьютерной графике (А.В. Переберин, 2002, Э. Столниц и др., 2002, Л.В. Новиков, 1999), в задачах обработки различной информации (например, в физике высоких энергий (А.Б. Шитов, 2001)) и т.д. Благодаря простоте и эффективности алгоритмов вейвлет-анализа, он находит себе широкое применение. Ниже будут рассмотрены некоторые вопросы применения вейвлет-анализа для обработки карт геолого-геофизических параметров, построенных на равномерной сетке. Подобные алгоритмы применялись раньше для работы с растровыми изображениями (Э. Столниц и др., 2002).

Вейвлет-анализ, примененный для обработки карт решает как вопросы визуализации карт, так и модифицирует схему расчета карт в случае, если данные заданы с погрешностью. Можно выделить следующие новшества, привносимые вейвлетами в вопросы визуализации о обработки карт:

- **Простые и быстродействующие алгоритмы.** Набор формул, реализующих декомпозицию (разложение сигнала на высокочастотную и низкочастотную составляющие) и реконструкцию (восстановление сигнала по высокочастотной и низкочастотной составляющим) не превышает десятка и не вызывает трудностей в их программировании. Для работы алгоритмов также не требуется большого количества оперативной памяти компьютера.

- **Многомасштабное иерархическое представление поверхности, возможность отображать карту с различными уровнями детализации.** Скорость отображения карты в виде трехмерной поверхности в первую очередь связано с количеством треугольников (или других графических примитивов), необходимых для отображения поверхности. Вопрос уменьшения количества треугольников может быть решен за счет выбора подходящего масштаба для отображения. Так, например, в случае высокодетальной модели количество треугольников может быть столь велико, что при отображении их на экране в один пиксел будут «сливаться» по несколько треугольников. При помощи вейвлет-анализа и иерархического представления поверхности можно выбрать соответствующий масштаб, при котором количество отображаемых треугольников будет гораздо меньшим, а пользователь не сможет увидеть разности между двумя поверхностями, отображенными с разными масштабами.

- **Возможность выбора оптимальной сетки для отображения.** При визуализации высокодетальной карты целиком и при рассмотрении ее отдельного участка, карта должна отображаться на различных по шагу (расстоянию между узлами) сетках: на сетке с большим шагом для первого случая и с мелким шагом для второго. В зависимости от выбранного шага сетки будет меняться и детальность карты - на карте с сеткой с мелким шагом количество "деталей" будет бóльшим. Техника вейвлет-анализа позволяет быстро пересчитывать карту с одной сетки на другую (например, с сетки с более мелким шагом на сетку с крупным шагом).

- **Борьба с шумами.** Более подробно этот вопрос изложен в §3.2.

Применение техники вейвлет-анализа для обработки карт геолого-геофизических параметров основано на:

- Использовании равномерной сетки.

- Построении карт и избыточной сеткой.

- Использовании простейшего вейвлет-базиса (базис Хаара).

Рассмотрим, как производится одно вейвлет-разложение (декомпозиция) по базису Хаара для грида, заданного на равномерной сетке.

Пусть $\mathtt{S} = \{\mathtt{S}_{ij}\}$ - квадратная матрица, значения элементов которой соответствуют значениям в узлах равномерной сетки. Размерность матрицы $\mathtt{S}$ совпадает с размерностью грида. Пусть количество узлов по оси OX и по оси OY есть число, являющееся степенью двойки, т.е. 2^k. Таким образом размерность матрицы $\mathtt{S}$ равна $(2^k \times 2^k)$. Схема описанной ниже декомпозиции грида с соответствующей ему матрицей $\mathtt{S}$ изображена на рис. 3.1.

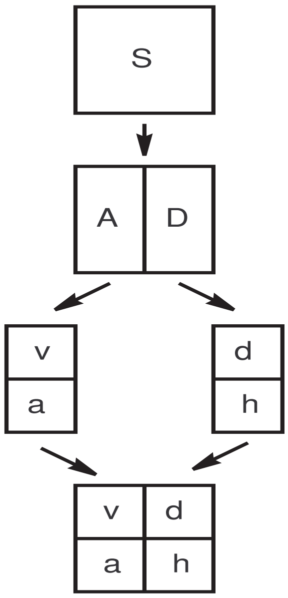


Рис. 3.1. Схема декомпозиции грида.

$$\mathtt{A}_{i,j} = \frac{\mathtt{S}_{2i,j} + \mathtt{S}_{2i+1,j}}{2}, \quad \begin{cases} i = 0, \ldots, 2^{k-1} - 1, \\ j = 0, \ldots, 2^k - 1, \end{cases}$$

$$\mathtt{D}_{i,j} = \frac{\mathtt{S}_{2i,j} - \mathtt{S}_{2i+1,j}}{2}, \quad \begin{cases} i = 0, \ldots, 2^{k-1} - 1, \\ j = 0, \ldots, 2^k - 1, \end{cases}$$

$$\mathtt{a}_{i,j} = \frac{\mathtt{A}_{i,2j} + \mathtt{A}_{i,2j+1}}{2}, \quad \begin{cases} i = 0, \ldots, 2^{k-1} - 1, \\ j = 0, \ldots, 2^{k-1} - 1, \end{cases}$$

$$\mathtt{v}_{i,j} = \frac{\mathtt{A}_{i,2j} - \mathtt{A}_{i,2j+1}}{2}, \quad \begin{cases} i = 0, \ldots, 2^{k-1} - 1, \\ j = 0, \ldots, 2^{k-1} - 1, \end{cases}$$

$$\mathtt{h}_{i,j} = \frac{\mathtt{D}_{i,2j} + \mathtt{D}_{i,2j+1}}{2}, \quad \begin{cases} i = 0, \ldots, 2^{k-1} - 1, \\ j = 0, \ldots, 2^{k-1} - 1, \end{cases}$$

$$\mathtt{d}_{i,j} = \frac{\mathtt{D}_{i,2j} - \mathtt{D}_{i,2j+1}}{2}, \quad \begin{cases} i = 0, \ldots, 2^{k-1} - 1, \\ j = 0, \ldots, 2^{k-1} - 1, \end{cases}$$

Декомпозиция проводится по написанным выше формулам: сначала выполняется преобразование над строками грида: производится попарное осреднение значений в узлах сетки и нахождение разности значений. Таким образом высчитываются матрицы A и D. Затем применяется попарное усреднение и нахождение разностей к каждому получившемуся столбцу для каждой из матриц A и D. В результате получаем матрицы

- a - осредненные значения, аппроксимация.
- v - уточняющие коэффициенты «по вертикали»
- h - уточняющие коэффициенты «по горизонтали»
- d - уточняющие коэффициенты «по диагонали»

Восстановление (реконструкция) грида по набору уточняющих коэффициентов и матрицы, содержащей осредненные значения производится по схеме, изображенной на рис. 3.2.

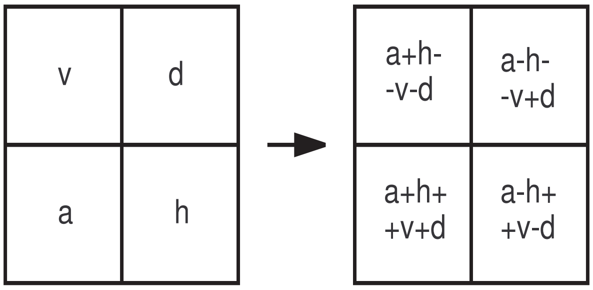


Рис. 3.2. Схема реконструкции грида.

В виде формул эта схема записывается так:

$$
\begin{aligned}
\mathtt{S}_{2i,2j} &= \mathtt{a}_{i,j} + \mathtt{h}_{i,j} + \mathtt{v}_{i,j} + \mathtt{d}_{i,j},\\
\mathtt{S}_{2i+1,2j} &= \mathtt{a}_{i,j} - \mathtt{h}_{i,j} + \mathtt{v}_{i,j} - \mathtt{d}_{i,j},\\
\mathtt{S}_{2i,2j+1} &= \mathtt{a}_{i,j} + \mathtt{h}_{i,j} - \mathtt{v}_{i,j} - \mathtt{d}_{i,j},\\
\mathtt{S}_{2i+1,2j+1} &= \mathtt{a}_{i,j} - \mathtt{h}_{i,j} - \mathtt{v}_{i,j} + \mathtt{d}_{i,j}.
\end{aligned}
$$

Для примера сравним карты, построенные по предлагаемой выше технике, по данным абсолютных отметок кровли пласта АВ1(3) Самотлорского месторождения. Первоначально карта была построена с избыточной сеткой, ее шаг составил 35 м. Карта, изображенная на рис. 3.3 обладает значительной избыточностью. Для ее построения был применен метод ПМФ из §2.3.

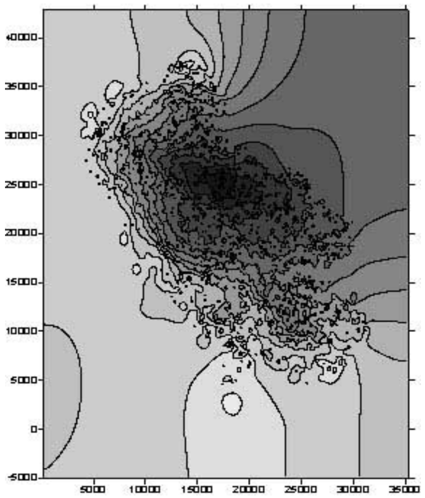


Рис. 3.3. Карта с избыточной сеткой.

Карты (рис. 3.4) иллюстрируют ликвидацию избыточности информации (уничтожение высокочастотной составляющей карты) с помощью четырехкратного и пятикратного вейвлет-преобразования. Операции вейвлет-преобразования карты на компьютере Pentium-4, не смотря на большой объем информации, практически не занимают машинного времени и являются пересчетом исходной избыточной карты (рис. 3.3). Карты (рис. 3.4) можно назвать картами одного и того же объекта с разной разрешающей способностью. Очевидно, что запросы на такие карты в зависимости от потребностей всегда будут существовать.

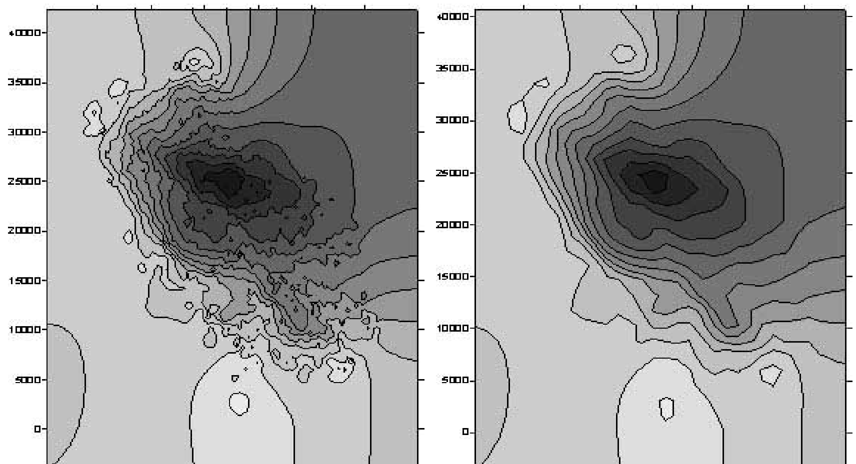


Рис. 3.4. Четырех и пятикратное вейвлет-преобразование.

3.2. Применение техники вейвлет-анализа для подавления влияния погрешностей в исходных данных.

Часто геолого-геофизические данные, полученные по замерам того или иного параметра в скважинах, содержать в себе некоторую погрешность. С этой погрешностью приходится считаться.

Обычно данные разделяют на две составляющие - «полезный сигнал», т.е. точное значение параметра в скважине, и «шум» - погрешность измерений или методов предварительной обработки информации. Стандартные способы борьбы с «шумом» заключаются в:

- аппроксимационной постановке задачи расчета значений в узлах грида (А.М. Волков, 1988, А.Г. Плавник и др., 2002).
- предварительной обработке исходных данных, участвующих в расчете грида (В.И. Аронов, 1990, В.А. Василенко, 1986, В.А. Василенко, 1983).
- сглаживании рассчитанного грида.

Предлагаемая техника избавления от «шумов» основана на применении техники вейвлет-анализа, описанного в §3.1, к карте, рассчитанной на умеренно избыточном гриде. Применение этой технологии для избавления от «шума» (denoise) известно для обработки растровых изображений (Э. Столниц и др., 2002, А.П. Петухов, 1999).

Предлагаемая технология применения аппарата вейвлет-анализа для подавления «шума» при расчете карт довольно-таки проста. Сперва строится карта на умеренно избыточной сетке по данным, содержащим некоторую погрешность. После этого, используя технику вейвлет-анализа полученная карта пересчитывается на карту с более крупным шагом сетки. При этом, в процессе пересчета вейвлет-анализ позволяет выделить низкочастотную составляющую сигнала, которая чаще всего и является «шумом». При отображении карты выделенный «шум» следует отбросить.

Рассмотрим на примере, как при помощи описанной выше технологии можно избавиться от влияния, привносимым погрешностями измерений в исходных данных на конечный результат - карту.

В качестве исходных данных для расчета возьмем набор замеров абсолютных отметок подошвы пласта АВ1(1-2) Самотлорского месторождения. Количество скважин, в которых были произведены замеры равно 16824.

Среднее значение параметра составило 1627.1 метров, а среднеквадратическое отклонение 31.8 метров.

По этим данным была рассчитана карта на сетку с количеством узлов (1024×1024), после чего эта карта была пересчитана на сетку (256×256) узлов. Результат изображен на рис. 3.5.

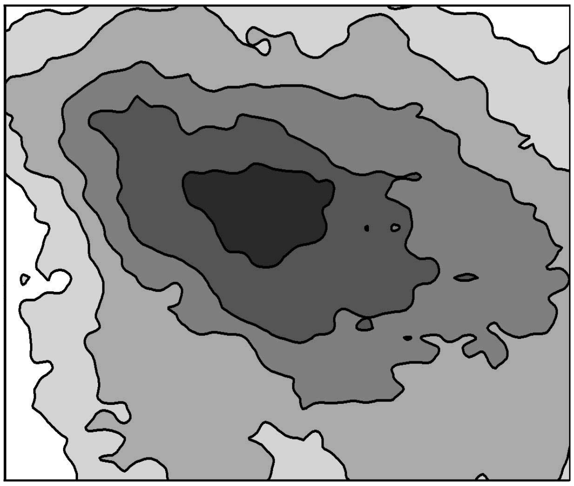


Рис. 3.5. Грид, рассчитанный по неискаженным данным.

В исходные данные был добавлен «шум», сгенерированный датчиком случайных чисел, выдающим случайные значения, распределенные по нормальному закону $N(0, 1.6)$. Если по полученным исходным данным рассчитать карту на сетке, состоящей из (256×256) узлов, то результат (рис. 3.6, картинка слева) будет сильно отличаться от результата, полученного по неискаженным данным (рис. 3.5).

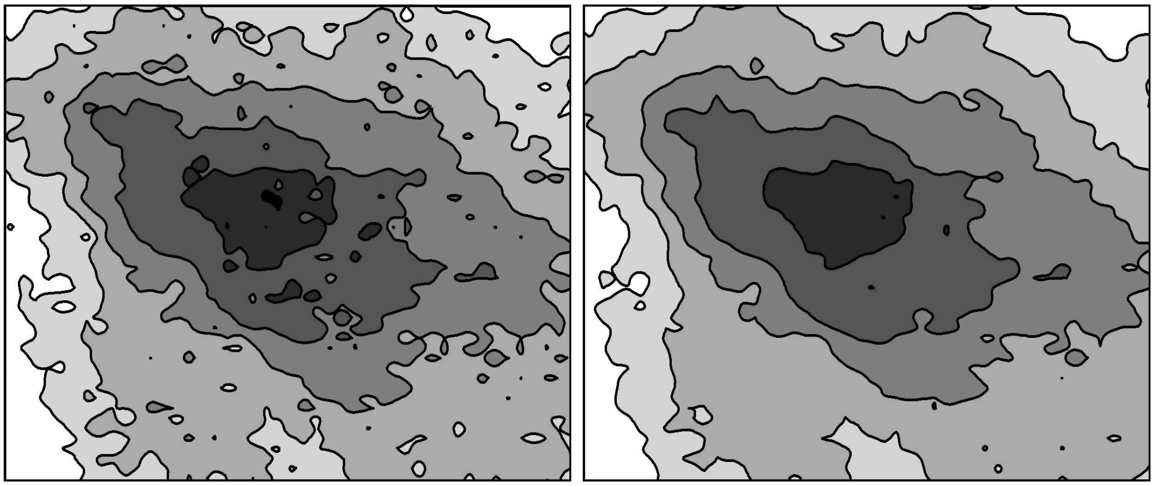


Рис. 3.6. Грид, с нанесенным шумом и обработанный грид.

Для подавления шума была произведена следующая последовательность действий:

1. По искаженным данным был рассчитан избыточный грид, состоящий из (2048×2048) узлов. Заметим, что расчет такого грида не занял много времени. На компьютере Pentium-4 он занял порядка 30 секунд.

2. К полученному явно гриду было три раза применено вейвлет-преобразование (декомпозиция грида). При этом получился грид с количеством узлов (256×256) и в восемь раз большим расстоянием между узлами сетки. В результате были «отщеплены» высокочастотные составляющие, являющиеся по-сути добавленным «шумом».

Результат работы алгоритма представлен на рис. 3.6, картинка справа. Как видно, полученный результат мало отличается от карты, построенной по неискаженным данным (рис. 3.5).

Приложение

1. Классификация алгоритмов гридинга геолого-геофизических полей по типам возникающих матричных операторов.

Существует множество различных методов восстановления полей геолого-геофизических параметров. Все они основаны на различных принципах и предположениях (вносятся различные априорные сведения о структуре восстанавливаемого поля, предполагается существование различных взаимосвязей между исходными данными, непрерывность поля или даже существование некоторых его производных и др.). Несмотря на различия и сходства методов с точки зрения описывающей их теории, одним из способов их классификации является разделение методов по типам матриц, с которыми приходится иметь дело во время работы того или иного алгоритма. Рассматривая таким образом методы восстановления полей, наиболее часто используемые в комплексах программ, предназначенных для построения карт полей геолого-геофизических параметров (различного рода методы сплайн-интерполяции и аппроксимации, метод крайгинга, метод Шеппарда и др.), можно четко выделить три основных группы:

1. методы с плотными матрицами.

2. методы с разреженными матрицами.

3. методы, в которых нет решения матричных уравнений.

Большое семейство хорошо зарекомендовавших себя и получивших широкое распространение методов восстановления полей параметров описываются при помощи теории абстрактных сплайнов (В.А. Василенко, 1983), поэтому будем использовать терминологию, принятую в этой области.

Понятие абстрактных интерполяционных и сглаживающих сплайнов.

Пусть X, Y, Z - три гильбертовых пространства. Из пространства X в пространство Z действует линейный ограниченный оператор $A : X \to Z$, а в пространство Y линейный ограниченный оператор $T : X \to Y$, который называется *энергетическим* оператором. В пространстве Z задан вектор исходных данных $z \in Z$.

Определение 1 (Задача интерполяции). *Пусть $A^{-1}(z) \neq \emptyset$. Интерполяционным сплайном σ называется элемент пространства X, удовлетворяющий равенству*

$$A\sigma = z,$$
$$||T\sigma||_Y^2 = \min_{\mathrm{x} \in A^{-1}(z)} ||T\mathrm{x}||_Y^2. \tag{1}$$

Определение 2 (Задача аппроксимации). *Назовем элемент $\sigma_\alpha \in X$ сглаживающим сплайном, если справедливо равенство*

$$\Phi_\alpha(\sigma_\alpha) = \min_{\mathrm{x} \in X} \Phi_\alpha(\mathrm{x}), \tag{2}$$

где

$$\Phi_\alpha(x) = \alpha||T\mathrm{x}||_Y^2 + ||A\mathrm{x} - z||_Z^2,\ \alpha \geq 0. \tag{3}$$

В задачах картопостроения задачи интерполяции и аппроксимации решаются в двумерной области, т.к. исходные данные для создания карты геолого-геофизического признака - это: скважины с заданными координатами и замеренными значениями картируемого признака, значения заданные на контурах, априорная информация и т.д. Таким образом задача сводится к построению функции двух переменных, которую будем обозначать $\sigma(x, y)$. На основании этой функции строится карта, т.е. рассчитываются значения в узлах равномерной сетки, а затем строятся изолинии.

На практике часто задаются некоторой степенью гладкости, необходимой для функции σ, поэтому в качестве пространства X обычно выступает пространство Соболева $W_2^m(\Omega)$ (m - степень гладкости). Для построения функции, приближающей сплайн-функцию, в качестве X используется конечномерное пространство, построенное из линейных комбинаций простых для вычислений функций (например, таких как B-сплайны m-го порядка).

В задачах картирования оператор A вычисляет значения функции на заданной неравномерной сетке. Эта сетка состоит из узлов, расположенных в точках исходных данных (т.е. в скважинах, в фиктивных точках, в точках, полученных при дискретизации контуров и т.д.). Вектор исходных данных $z \in Z$ есть вектор исходных значений, заданный в узлах этой неравномерной сетки.

1.1. Методы, приводящие к плотным симметричным матрицам.

Методы, приводящие к плотным симметричным матрицам очень похожи друг на друга, т.к. все они заключаются в конструировании функции специального вида:

$$\sigma(P) = \sum_{i=1}^{N} a_i G_i(r) + n(P),\ P \in \Omega, \tag{4}$$

где Ω - двухмерная область, a_i - коэффициенты разложения, $n(P)$ - некий двумерный полином, $G_i(r) = G(||P - P_i||_2)$ - базисные функции, порожденные из эталонной базисной функции $G(r)$, $r \geq 0$. Для фиксированного i функция $G_i(r)$ есть функция $G(r)$ с центром в точке P_i (т.е. получена параллельным переносом функции $G(r)$ с центром в нуле в функцию, с центром в т. P_i). Здесь $r = ||P - P_i||_2$ есть расстояние в евклидовом пространстве между точками P и P_i. Функции подобного вида называются *радиальными*, т.к. их аргументом является расстояние от центра функции до некоторой точки.

В теории сплайнов (В.А. Василенко, 1983) решение задачи интерполяции или сглаживания также может искаться в виде (4). Пусть Ω - некоторая ограниченная двухмерная область, $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ - два функциональных гильбертовых пространства, $T : X(\Omega) \to Y(\Omega)$ - линейный ограниченный оператор. Определим на $X(\Omega)$ независимые ограниченные функционалы $k_1, \ldots, k_N$, связанные с оператором A соотношением

$$A\mathrm{x} = ((k_1, \mathrm{x})_X, (k_2, \mathrm{x})_X, \ldots, (k_N, \mathrm{x})_X)\,,$$

т.е. каждый функционал k_i сопоставляет функции $\mathrm{x} \in X$ ее значение, вычисленное в точке P_i.

Будем предполагать, что для любых чисел $z_1, \ldots, z_N$ задача сплайн-интерполяции

$$\begin{gathered}(k_i, \sigma)_{X(\Omega)} = z_i,\ i = \overline{1, N} \\ ||T\sigma||^2_{Y(\Omega)} = \min\end{gathered} \tag{5}$$

имеет единственное решение $\sigma \in X(\Omega)$.

Рассмотрим оператор $T^*T : X(\Omega) \to X(\Omega)$, где T^* - сопряженный к T. Пусть существует функция Грина $G(x, t)$ этого оператора, обладающая свойством

$$T^*TG(x, t) = \delta_t, \quad x, t \in \Omega, \tag{6}$$

где $\delta_t \in X(\Omega)$ - дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке t.

Теорема 1.1. *(В.А. Василенко, 1983) Сплайн-функция $\sigma(P)$, являющаяся решением задачи (5), представима в виде*

$$\sigma(P) = \sum_{i=1}^{N} a_i (k_i(x), G(x,P))_{X(\Omega)} + n(P), \tag{7}$$

где $n(P)$ - элемент ядра оператора T, a_i - некоторые вещественные коэффициенты.

Метод сплайн-интерполяции с хаотически расположенными интерполяционными узлами (метод функций Грина).

Рассмотрим метод сплайн-интерполяции, основанный на представлении искомой функции в виде линейной комбинации функций Грина, как он изложен в (В.А. Василенко, 1983, В.О. Ашкеназы, 1999). В зарубежной литературе (David T. Sandwell, 1987, P. Wessel, D. Bercovici, 1998) этот метод известен под названием *"thin-plate splines"*. Роль оператора T здесь выполняет оператор обобщенных градиентов

$$D^2 = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\}^T.$$

Следуя теореме 1.1 для оператора T^*T, который в нашем случае равен бигармоническому оператору Δ^2, существует функция Грина такая, что

$$\Delta^2 G(x,t) = \delta(t).$$

Пусть Ω - двухмерная ограниченная область, $P_1, \ldots, P_N$ - система расположенных в Ω точек, в которых известны значения $z_1, \ldots, z_N$. Тогда функция Грина для оператора Δ^2 выражается формулой

$$G(r) = r^2 \ln r^2. \tag{8}$$

и по теореме 1.1 интерполяционная функция должна искаться в виде

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} a_i r^2 \ln r^2 + \nu_{00} + \nu_{10} x + \nu_{01} y, \tag{9}$$

где $\nu_{00} + \nu_{10} x + \nu_{01} y$ - полином из ядра оператора T.

Исходя из формулы (6), функция $\sigma(x,y)$ должна удовлетворять уравнению

$$T^*T\sigma(x,y) = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta(P - P_i),$$

или
$$\Delta^2\sigma(x,y) = \sum_{i=1}^{N} a_i\delta(P-P_i),$$
где $\delta(P-P_i)$ - дельта-функция, сосредоточенная в точке P_i, a_i - искомые коэффициенты разложения (9).

Поставим задачу отыскания интерполяционного сплайна $\sigma(x,y) \in W_2^2(\Omega)$ из условий
$$\sigma(P_i) = z_i,\ i = \overline{1,N}, \tag{10}$$
$$\int\limits_{\Omega} \left[\sigma_{xx}^2 + 2\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yy}^2\right] d\Omega = \min_{W_2^2}.$$
Эти условия соответствуют постановке задачи интерполяции (5), где k_i - функционал, ставящий в соответствие функции ее значение в точке P_i, оператор $T = D^2$.

Все коэффициенты разложения функции (9) находятся из решения системы:
$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$
где $A_{i,j} = G(||P_i - P_j||_2)$, или, подробнее
$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1N} & 1 & x_1 & y_1 \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2N} & 1 & x_2 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & 0 & 1 & x_N & y_N \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_N & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \\ \nu_{00} \\ \nu_{10} \\ \nu_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Основные вычислительные затраты при построении поверхности рассматриваемым методом приходятся на обращение плотной симметричной матрицы системы (12), не являющейся к тому же положительно определенной (В.О. Ашкеназы, 1999, R. Schaback, 1995). Для хранения такой матрицы в памяти компьютера требуется как минимум $(N+3)^2/2$ ячеек оперативной памяти и $(N+3)^3/2$ арифметических операций (В.О. Ашкеназы, 1999). Это может приводить к определенным затруднениям при

$N > 1000 \ldots 1500$. В работе (В.О. Ашкеназы, 2001) рассматривается эффективный алгоритм для построения сплайн-поверхностей (алгоритм Ж. Менге), сводящий вычисление коэффициентов сплайна к решению системы линейных уравнений размерности N с *положительно определенной*, симметричной матрицей. При этом можно воспользоваться устойчивыми и экономичными алгоритмами *метода Холецкого* или одним из итерационных методов (метод сопряженных градиентов, предлагаемым нами методом блуждания по спектру (МБС), методом полинома наилучшего приближения (ПНП)).

Метод сплайн-интерполяции с натяжением (метод функций Грина).

Логическим продолжением рассмотренного выше метода сплайн-интерполяции типа "тонкая пластина" является метод *сплайн-интерполяции с натяжением* (P. Wessel, D. Bercovici, 1998, W.H.F. Smith, P. Wessel, 1990, H. Mitasova, L. Mitas, 1993). В силу свойств гладкости, присущим интерполяционным функциям, построенным методом (10), эти функции могут иметь нежелательные оссцилляции между точками исходных данными и иногда даже добавлять дополнительные точки экстремума, что является нежелательным. Добавление натяжений в сплайны ослабляет эти недостатки.

В качестве оператора T и сопряженного ему T^*в методе используется

$$T = \left\{\sqrt{t}\frac{\partial}{\partial x}, \sqrt{t}\frac{\partial}{\partial y}, \sqrt{d}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \sqrt{d}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \sqrt{d}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}, \sqrt{d}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}^T$$

$$T^* = \left\{-\sqrt{t}\frac{\partial}{\partial x}, -\sqrt{t}\frac{\partial}{\partial y}, \sqrt{d}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \sqrt{d}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \sqrt{d}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}, \sqrt{d}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}$$

$$T^*T = d\Delta^2 - t\Delta$$

Сплайн-функция, являющаяся решением задачи сплайн-интерполяции с натяжением, должна удовлетворять уравнению

$$d\Delta^2\sigma(x,y) - t\Delta\sigma(x,y) = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta(P - P_i),$$

где d - жесткость пластины, t - натяжение, заданное на границе, $\delta(P - P_i)$ - дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке P_i. Здесь $T^*T = d\Delta^2 -$

$t\Delta$. Согласно общей теории, такая функция ищется в виде

$$\sigma(x,y) = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi(r_i) + \lambda,$$

где $\phi(r)$ - функция Грина оператора T^*T:

$$\phi(r) = K_0(p \cdot r) + \ln(p \cdot r),$$

$$r_i = |P - P_i|, \qquad p^2 = \frac{T}{D}.$$

Как говорится в (David T. Sandwell, 1987), для вычислений, производимых с одинарной точностью, одномерная интерполяция применима для примерно 40 точек. Для двумерного же случая уже решаются системы порядка 400x400, после чего матрицы становятся близкими к сингулярным. Устойчивость системы линейных уравнений напрямую зависит от отношения наименьшего расстояния между исходными точками к наибольшему. Использование арифметики с двойной точностью (P. Wessel, D. Bercovici, 1998) позволяет увеличивать количество исходных данных до 5000 и решать системы размерностью 5000x5000. Однако, т.к. для хранения матрицы необходимо запоминать $N^2/2$ чисел, метод плохо использовать для большого количества исходных данных. Для уменьшения размерности решаемой системы линейных уравнений часто прибегают к методу декомпозиции (H. Mitasova, L. Mitas, 1993): всю область картирования делят на несколько частей, взаимопересекающихся с некоторым "нахлестом" друг на друга, после чего производят интерполяцию в этих отдельно взятых областях. Такой "нахлест" необходим для согласованности расчитанных блоков. До сих пор не существует какого-либо критерия для выбора размеров блоков и размеров областей их взаимных пересечений. Зачастую такой выбор обуславливается соотношением скорости вычислений и качества получаемой карты, оцениваемого пользователем.

Рассмотренный метод (P. Wessel, D. Bercovici, 1998) обладает большей численной устойчивостью, по сравнению с методом (10) и его устойчивость повышается с ростом натяжения t.

Метод обыкновенного крайгинга или стохастические сплайны.

В некоторых задачах математическая модель функции $f(P)$, $P \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$, восстанавливаемой по дискретным данным, может быть определена *вероятностным* образом. Например, можно представить $f(P)$ как реализацию случайного процесса с некоторыми заданными статистическими характеристиками.

Тогда, при данных $\{P_i : z_i = f(P_i), i = \overline{1, N}\}$ мы можем считать z_i значениями этой случайной реализации в N заданных точках P_i.

Подобную задачу решает метод крайгинга (Ж. Матерон, 1968), (М. Давид, 1980). В методе *обыкновенного крайгинга* функция $\sigma(P)$, приближающая $f(P)$ ищется в виде

$$\sigma_K(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \widetilde{a}_i(x, y) z_i \tag{13}$$

Для нахождения значения функции $\sigma_K(x, y)$ в произвольной точке P_k необходимо решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \widetilde{a}_1 K(0) + \widetilde{a}_2 K(r_{12}) + \ldots + \widetilde{a}_N K(r_{1N}) + \overline{\lambda} & = K(r_{1k}), \\ \widetilde{a}_1 K(r_{12}) + \widetilde{a}_2 K(0) + \ldots + \widetilde{a}_N K(r_{2N}) + \overline{\lambda} & = K(r_{2k}), \\ \ldots, \\ \widetilde{a}_1 K(r_{1N}) + \widetilde{a}_2 K(r_{2N}) + \ldots + \widetilde{a}_N K(0) + \overline{\lambda} & = K(r_{Nk}), \\ \widetilde{a}_1 + \widetilde{a}_2 + \ldots + \widetilde{a}_N & = 1, \end{cases} \tag{14}$$

где $K(r)$ - ковариационная функция, зависящая от расстояния. Как правило, ковариационную функцию, построенную по исходным данным приближают некоторой модельной функцией, в параметры которой закладываются априорная информация об изучаемом процессе.

Как показано в §2.7.3, решение задачи обыкновенного крайгинга соответствует задаче интерполяции, где функция $\sigma_K(P)$ ищется в форме

$$\sigma_K(x, y) = \sum_{i=1}^{N} a_i K_i(r) + \lambda. \tag{15}$$

Коэффициенты a_i находятся из решения системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} A & e^T \\ e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^T \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^T \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $A_{i,j} = K\left(||P_i - P_j||_2\right)$, $e = \{1, \ldots, 1\}$.

Такая же задача (с точностью до системы уравнений (16) и представления функции (15)) решается в методе построения *стохастических сплайнов* (В.О. Ашкеназы, 1999, В.О. Ашкеназы, 2001). В работе (G.S. Kimeldorf, G. Wahba, 1970) показано, что построение функции вида (15), а также построение *стохастического сплайна* соответствует построению некоторого D^m сплайна, обеспечивающего минимизацию *функционала гладкости* на элементах $\sigma_K(P)$ из гильбертова пространства с воспроизводящим ядром $K(t,s) = K(r)$, $t, s \in \Omega$.

Другими словами, несмотря на то, что по модельной ковариационной функции $K(r)$ довольно трудно восстановить оператор T, его можно приближать дифференциальными операторами. При этом метод обыкновенного крайгинга (или стохастические сплайны) могут привести уже к симметричным матрицам с разреженной структурой. Для того, чтобы функция $K(r)$ была воспроизводящим ядром для гильбертова пространства, необходимо, чтобы она была положительно определенной (см. определение 3). Однако, для распространенных модельных функций $K(r)$ не было проведено исследований на их (условную) положительную определенность.

Метод интерполяции радиальными базисными функциями.

В методах интерполяции радиальными базисными функциями интерполянт ищется в форме

$$\sigma(P) = \sum_{i=1}^{N} a_i \Phi(||P - P_i||_2), \tag{17}$$

где $\Phi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ *положительно определенная на* $\mathbf{R}^d$ функция в следующем смысле:

Определение 3. *[Положительная определенность функции на* $\mathbf{R}^d$*] Функция* $\Phi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ *называется положительно определенной, если для всех наборов различных точек* $P = \{P_1, \ldots, P_N\}$ *из* $\mathbf{R}^d$ *матрица*

$$A = (\Phi(||P_i - P_j||_2))_{1 \le i,j \le N} \tag{18}$$

является положительно определенной.

Таким образом, при заданной положительно определенной функции Φ система линейных уравнений, обеспечивающая интерполяционные свойства функции $\sigma(P)$

$$\sigma(P_j) = \sum_{i=1}^{N} \Phi(||P_i - P_j||_2) = z_j \tag{19}$$

всегда однозначно разрешима.

Все интерполянты, которые находятся в виде (17) доставляют минимум некоторому "энергетическому функционалу" из множества всех интерполяционных функций. К сожалению, на настоящий момент не удалось обнаружить работ, в которых бы исследовалась структура этого функционала по отношению к радиальным базисным функциям.

Важным обобщением формулы (17) является запись интерполянта в виде

$$\sigma(P) = \sum_{i=1}^{N} a_i \Phi(||P - P_i||_2) + \sum_{l=1}^{M} c_l p_l(P), \tag{20}$$

где $\mathbf{P}_m^d$ - пространства d-мерных полиномов порядка не большего чем m, а $p_1, \ldots, p_M$ - базис этого пространства. В этом случае от функции Φ обычно требуют *условной* положительной определенности порядка m на $\mathbf{R}^d$, т.е. чтобы матрица A из (18) была положительна определена для векторов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbf{R}^N$, удовлетворяющих

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_l(P_i) = 0, \quad 1 \leq l \leq M.$$

Для построения интерполяционной функции в виде (20) необходимо решить систему линейных уравнений

$$\sigma(P_j) = \sum_{i=1}^{N} \Phi(||P_i - P_j||_2) + \sum_{l=1}^{M} = z_j,$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i p_l(P_i) = 0.$$

В качестве базисных функций $\Phi(r)$ получили наибольшее распространение следующие функции:

1. $\Phi(r) = r^\beta$, $\beta > 0$, $\beta \in 2\mathbf{N}$
2. $\Phi(r) = r^{2k} \log(r)$, $k \in \mathbf{N}$ (тонкая пластина)
3. $\Phi(r) = (c^2 + r^2)^\beta$, $\beta < 0$ (обратные мультиквадрики)

4. $\Phi(r) = (c^2 + r^2)^\beta$, $\beta > 0$ (мультиквадрики)

5. $\Phi(r) = e^{-\alpha r^2}$, $\alpha > 0$ (гауссиана)

6. $(1-r)^4_+(1+4r)$

Для задач интерполирования радиальными базисными функциями были найдены оценки наименьшего и наибольшего собственных значений матричных операторов (R. Schaback, 2002), выведена оценка устойчивости решения задачи интерполяции. Также представлен итерационный метод решения больших разреженых систем линейных уравнений, получаемых при интерполяции базисными функциями с существенно локальным базисом (R. Schaback, H. Wendland, 2000).

1.2. Методы, приводящие к разреженным симметричным матрицам.

Метод наименьшей кривизны (MINC).

Метод наименьшей кривизны - давно известный метод гридинга, применяемый в задачах построения карт в науках о земле и исследовании атмосферных явлений. Первая публикация, описывающая этот метод датируется 1974 годом (I. Briggs, 1974), а свободно распространяемый программный код, реализующий этот алгоритм появился в 1976 году (C.J. Swain, 1976). За рубежом этот метод известен под названием MINC (minimum curvature).

Результатом работы метода является карта, описывающая поверхность, имеющую минимальную кривизну и удовлетворяющую ряду граничных условий: значениям, заданным в хаотически расположенных точках и условиям, заданных на границе карты. Такая постановка задачи соответствует задаче нахождения функции $\sigma(x, y)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\nabla^2(\nabla^2)\sigma(x,y) = \sum_i f_i\ \delta(x - x_i, y - y_i), \tag{21}$$

где (x_i, y_i, z_i) - точки, заданные в качестве граничных условий. Значения f_i выбираются таким образом, что $\sigma(x, y) \to z_i$ при $(x, y) \to (x_i, y_i)$.

Физическим аналогом функции $\sigma(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (21) является жесткая деформируемая пластина, закрепленная в точках (x_i, y_i, z_i).

На границе предполагаются реализованными граничные условия изгиба жесткой деформируемой пластинки, называемые "свободным краем". Отметим, что этот тип граничных условий никак не связан с реальным поведением параметров геологических пластов на границах карты.

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\nabla^2\sigma\right) = 0, \tag{22}$$

где n - вектор нормали к краю.

В угловых точках задается задается условие

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\, \partial y} = 0. \tag{23}$$

Для дифференциального уравнения (21) существует его вариационный аналог - задача минимизации функционала, высчитывающего кривизну поверхности:

$$C(\sigma) = \int\int \left(\nabla^2\sigma\right)^2 \; dx\, dy. \tag{24}$$

Для того, чтобы решить дифференциальное уравнение (21) с граничными условиями (22)-(23) в методе наименьшей кривизны предлагается минимизировать кривизну поверхности, вычисленную в узлах грида. При этом интегрирование заменяется суммированием значений подинтегральной функции, вычисленными в узлах грида. Дифференциальный оператор ∇^2 заменяется конечно-разностным аналогом. В результате уравнение (24) заменяется дискретным аналогом вида:

$$C(\sigma) \approx \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(C_{i,j})^2, \tag{25}$$

где $C_{i,j}$ представляют собой значения, вычисленные по конечно-разностной формуле в узле (i,j). При минимизации суммы (25) должны учитываться условия, заданные в точках и на границе грида (22)-(23), поэтому значения $C_{i,j}$ для точек расположенных у границы грида будут вычисляться по формулам, задающим граничные условия. Для минимизации суммы (25), функции

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma_{i,j}},\; i = 1,\ldots,I;\; j = 1,\ldots,J \tag{26}$$

приравниваются к нулю и решается получившаяся система линейных уравнений.

Для учета граничных значений, заданных в точках $(x_i, y_i, z_i)_{i=1,\ldots,N}$ в алгоритме, предложенном (C.J. Swain, 1976) каждая точка (x_p, y_p) сносится в ближайший узел грида, т.е. узлу грида присваивается значение z_p. В случае, если на один узел грида приходится несколько точек, то выбирается точка, ближайшая к этому узлу.

В работе (I. Briggs, 1974) также предлагается алгоритм учета ограничений, заданных в хаотически расположенных точках. При этом возникает необходимость для каждой точки исходных данных решать систему, состоящую из шести уравнений. Алгоритм основан на вычислении кривизны по нескольким хаотически расположенным точкам.

Матрица системы линейных (26) уравнений метода наименьшей кривизны является существенно разреженной и симметричной. Ее структура достаточно проста, в результате чего не требуется хранение матрицы в памяти - ее элементы можно вычислять по приведенным выше формулам. Этот подход применим в случае, если для решения полученной системы линейных уравнений используются стационарные итерационные методы. Этот метод (и его аналоги) - один из самых эффективных способов гридинга большого количества исходных данных на гриды с большим количеством узлов.

Не смотря на эффективность метода с позиций скорости вычислений и его способности обрабатывать большие объемы данных, метод часто оказывается непригодным для картирования геолого-геофизических параметров, т.к. во-первых, может выдавать нежелательные оссилляции между точками исходных данных. Во-вторых, условия, задаваемые на границе грида не соответствуют априорным представлениям о поведении геологических и геофизических параметров. В результате, в полученной карте на границе присутствует нежелательное поведение параметра, которое объясняется тем, что метод наименьшей кривизны добавляет неверную информацию о поведении параметра на границе.

Метод сплайн-интерполяции с учетом напряжения.

Следующим шагом в развитии метода наименьшей кривизны стал алгоритм, предложенный (W.H.F. Smith, P. Wessel, 1990). Отличием этого метода от метода наименьшей кривизны заключается в том, что в дифференциальный оператор уравнения (21) добавляется еще одно слагаемое.

Для каждого слагаемого вводятся весовые коэффициенты:

$$(1 - T_I)\nabla^2(\nabla^2\sigma(x,y)) - T_I\nabla^2\sigma(x,y) = \sum_i f_i\delta(x - x_i, y - y_i). \tag{27}$$

Варьируя весовой коэффициент T_I, $0 \leq T_I \leq 1$, можно получать различные дифференциальные уравнения вида (27). Так, например, при $T_I = 0$ уравнение (27) обращается в (21) и в результате получается метод наименьшей кривизны. Другой крайний случай $T_I = 1$ нивелирует первое слагаемое и дифференциальный оператор уравнения (27) преобразуется в оператор Лапласа. Физическим аналогом функции, удовлетворяющей полученному в результате дифференциальному уравнению, является мыльная пленка, натянутая на точки граничных условий и удовлетворяющая условиям, заданным на границе. В качестве условий, заданных на границе, в работе (W.H.F. Smith, P. Wessel, 1990) используется выражение:

$$(1 - T_B)\frac{\partial^2\sigma}{\partial n^2} + T_B\frac{\partial\sigma}{\partial n} = 0, \tag{28}$$

где n - вектор нормали к одному из ребер, образующих прямоугольник, являющийся границей грида. Параметр T_B задает натяжение на границе.

Схема решения полученной краевой задачи аналогична схеме, используемой в методе наименьшей кривизны - дифференциальное уравнение заменяется соответствующей вариационной задачей, выписывается функционал, который необходимо минимизировать и решается соответствующая алгебраическая система линейных уравнений. Как было отмечено авторами (W.H.F. Smith, P. Wessel, 1990), при увеличении значения параметра T_I наблюдается улучшение сходимости итерационных процессов.

Метод конечных элементов при построении сплайн-функций.

Метод, схожий по смыслу с методом наименьшей кривизны, рассматривается в (В.А. Василенко, 1983). В отличие от метода наименьшей кривизны, в нем сразу записывается вариационная задача, минуя запись краевой задачи. Такой подход освобождает от необходимости задавать условия на границе грида, что более соответствует априорным представлениям о поведении геолого-геофизических параметров.

Итак, в рассматриваемом методе ищется функция

$$\sigma(x,y) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} a_{ij}B_{ij}(x,y), \tag{29}$$

где $B_{ij}(x,y)$ - базисные функции, в качестве которых взяты B-сплайны первого порядка, для них выполняется равенство $B_{ij}(x,y) = B_i(x)B_j(y)$. Центр базисной функции B_{ij} находится в (i,j)-м узле грида.

Функция $\sigma(x,y)$ находится как функция, доставляющая минимум функционалу:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} (\sigma(x_k, y_k) - z_k)^2 \to \min, \\ \int\limits_{\Omega} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) d\Omega \to \min\,. \end{cases} \tag{30}$$

Для нахождения функции $\sigma(x,y)$ необходимо решить систему линейных уравнений вида

$$\begin{pmatrix} \overline{T} & \overline{A} \\ \overline{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{\Lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{z} \end{pmatrix}, \tag{31}$$

где матрицы $\overline{T} = \{t_{ijkl}\}$ и $\overline{A} = \{a_{ijkl}\}$ - четырехиндексные и состоят из элементов

$$t_{ijkl} = \int\int_{\Omega} \left[\frac{\partial B_i(x)}{\partial x} B_j(y) \times \frac{\partial B_k(x)}{\partial x} B_l(y) + \right.$$
$$\left. B_i(x) \frac{\partial B_j(x)}{\partial y} \times B_k(x) \frac{\partial B_l(y)}{\partial y} \right] \, dx\, dy,$$

$$a_{ijkl} = \sum_{m=1}^{N} B_i(x_m) B_j(y_m) B_k(x_m) B_l(y_m).$$

Вектор $\overline{a} = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{IJ}\}$ состоит из искомых коэффициентов a_{ij}, вектор $\overline{z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_N\}$ состоит из значений, заданных в N хаотически расположенных точках с координатами $(x_i, y_i)_{i=1,\ldots,N}$.

Система (31) всегда совместна, симметрична, вырождена и имеет собственные числа разных знаков, обладает существенно разреженной структурой. Несмотря на вырожденность, у нее существует единственное решение по вектору $\overline{a}$ и неединственное по $\overline{\Lambda}$ (В.А. Василенко, 1983). Для отыскания $\overline{a}$ достаточно найти любое решение системы (31). Это можно сделать с помощью широкого класса итерационных методов. Автор предлагает использовать метод минимальных итераций Ланцоша.

Изложенный выше метод послужил отправной точкой в конструировании метода ПМФ, изложенного в §2.1 и §2.3. Отличия метода разработанного метода ПМФ от "метода конечных элементов при построении сплайн-функций" заключается в следующем:

1. *Выбор базисной функции.* В реализации метода ПМФ, рассмотренной в §2.3, вместо B-сплайна первого порядка в качестве базисной функции используется B-сплайн нулевого порядка. Такой выбор приводит к тому, что матрица $\overline{A}$ становится диагональной и отпадает необходимость решать систему вида (31). Вместо этого, в аналогичной постановке задачи, приходится решать две системы линейных уравнений существенно меньших размерностей. Более того, одна из систем будет диагональная, а другая - положительно определенная. Положительная определенность матрицы существенно расширяет диапазон применимых итерационных методов, т.к. становится возможным использовать специальные итерационные методы, разработанные для решения подобных систем линейных уравнений, что дает более быструю сходимость итерационных процессов.

2. *Последовательная минимизация серии функционалов.* Метод построения функции $\sigma(x, y)$, заключающийся в минимизации функционала (30) способен учитывать два типа исходной информации: значения, заданные в хаотически расположенных точках и априорное предположение о поведении функции в областях низкой плотности хаотически расположенных точек. Предлагаемая в §2.1 схема последовательной минимизации последовательности функционалов позволяет существенно расширить метод, добавляя в него возможность учитывать дополнительную информацию: значения, заданные на контурах, вспомогательные поверхности, линии разломов и т.д. Реализация полученного метода также будет отличаться эффективностью: большой скорости работы, малым использованием оперативной памяти компьютера и возможностью обрабатывать большие объемы информации. Это связано с тем, что при использовании в качестве базисной функции B-сплайна нулевого порядка, в большинстве случаев удается избежать решения задачи поиска условного экстремума и решения системы уравнений вида (31).

1.3. Методы, не требующие решения системы линейных уравнений.

Метод Шепарда.

Для расчета значений в узлах равномерной сетки применяется метод, известный под названием "метод Шепарда" (D. Shepard, 1968, M. Rauth, 1998). В качестве исходных данных используется набор хаотически расположенных точек $(x_k, y_k)_{k=1,\ldots,N}$ с заданными в них значениями $z_k = f(x_k, y_k)$. Требуется пересчитать значения, заданные в этих точках в узлы равномерной сетки. В методе Шепарда значения в узлах равномерной сетки высчитываются по формуле:

$$f(x_i, y_j) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} z_i/r_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{N} 1/r_k^2}, \tag{32}$$

где $r_k = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2}$.

Вышеописанный метод очень прост в реализации, т.к. не требует решения систем линейных уравнений. Однако, этот метод плохо подходит для построения карт по большому количеству исходных точек и для расчета значений на равномерной сетке, содержащей большое количество узлов. Это связано с тем, что выражение (32) зависит от всех исходных точек и вычисления по формуле (32) прийдется проводить столько же раз, сколько и узлов сетки.

Метод триангуляции.

Триангуляция Делоне на плоскости - это множество непересекающихся треугольников, в котором ни одна точка, не принадлежащая данному треугольнику, не попадает в окружность, описанную вокруг этого треугольника.

Все известные алгоритмы для построения триангуляции Делоне можно разделить на два класса:

1. Инкременционные. Они конструируют триангуляцию, начиная с любой внутренней точки или ребра границы, пошагово добавляя полученные новые треугольники по одному. Сложность их обычно оценивается величиной $O(N^2)$.

2. Рекурсивные ("разделяй и властвуй"). Эти алгоритмы рекурсивно разбивают заданное множество точек на поднаборы примерно одинакового размера с последующим слиянием полученных данных в необходимый результат. Эти алгоритмы могут достигать асимптотически оптимальной сложности, которая оценивается величиной $O(N \log N)$.

В работе (А.Л. Фукс, 2001) предложен алгоритм, имеющий сложность порядка $O(N)$, если расположение точек удовлетворяет обычно выполняемым на практике ограничениям.

По построенной в результате триангуляционной сетке строятся изолинии. Иногда результат пересчитывается на равномерную сетку, после чего также строятся линии уровня (изолинии).

2. Методы конструирования матриц, обладающих заданными свойствами.

Рассмотрим технологию конструирования матриц, обладающих заданными спектральным свойствами:

В евклидовом пространстве за основу берется случайная действительная кососимметрическая матрица K, которая легко получается из произвольной матрицы C вычитанием из нее транспонированной матрицы. Использование формулы Кэли (Ф.Р. Гантмахер, 1953) $O_1 = -(I-K)(I+K)^{-1}$, где K - построенная кососимметрическая, а I - единичная матрицы, приводит к ортогональной матрице O_1 со случайным спектром, но в соответствии с общей теорией, расположенным в комплексной плоскости на единичном круге. Ортогональная матрица O_1 со случайным спектром оказывается подходящим инструментом для конструирования большинства частных видов матриц, известных в математике и механике.

Для получения ортогональной матрицы с фиксированным или случайным спектром можно воспользоваться следующим преобразованием подобия: известно, что любая вещественная ортогональная матрица O вещественно- и ортогонально- подобна канонической ортогональной матрице, а именно:

$$O = O_1 \left\{ \left\| \begin{matrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix} \right\|, ..., \left\| \begin{matrix} \cos\varphi_q & \sin\varphi_q \\ -\sin\varphi_q & \cos\varphi_q \end{matrix} \right\|, \pm1, ..., \pm1 \right\} O_1^{-1}, \tag{1}$$

где

$$\left\{ \left\| \begin{matrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix} \right\|, ..., \left\| \begin{matrix} \cos\varphi_q & \sin\varphi_q \\ -\sin\varphi_q & \cos\varphi_q \end{matrix} \right\|, \pm1, ..., \pm1 \right\}$$

Рис. 7.

- квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят матрицы

$$\left\| \begin{array}{cc} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{array} \right\|,$$

или числа ± 1. Эта матрица называется канонической ортогональной матрицей, причем угол φ_i определяет положение ее собственного числа с номером i на комплексной плоскости на окружности радиуса единица. Задав углы φ_i фиксированным или случайным образом, получим соответственно ортогональную матрицу O с заданным или случайным спектром. Заметим, что для случайного задания матрицы C или чисел φ_i можно использовать датчики случайных чисел, имеющиеся в каждом математическом пакете программ. Напомним также, что при произвольных преобразованиях подобия типа $A = WBW^{-1}$ спектры матриц A и B совпадают. Как следует из определения (1), преобразование подобия сохраняет ортогональность матрицы B в том и только в том случае, если W ортогональная матрица.

Для конструирования симметрической матрицы следует учесть, что ее собственные числа действительны и преобразования подобия выполняются также с помощью произвольной ортогональной матрицы O_1. Каноническая форма симметрической матрицы имеет диагональную структуру $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\}$. Следовательно симметричная матрица S с заданным спектром строится с помощью вещественно-ортогонального преобразования подобия $S = O_1 \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\} O_1^{-1}$.

Как известно, для вещественной нормальной матрицы A спектр может быть произвольным комплексным, и преобразование подобия на основе ее канонической формы имеет вид

$$A = O \left\{ \begin{Vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ -\nu_1 & \mu_1 \end{Vmatrix}, ..., \begin{Vmatrix} \mu_q & \nu_q \\ -\nu_q & \mu_q \end{Vmatrix}, \mu_{2q+1}, ..., \mu_n \right\} O^{-1},$$

где собственное число с номером k в общем случае имеет вид $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$.

Такая технология конструирования матриц позволяет по сути сконструировать матрицу с заданным или случайным спектром на основе случайной квадратной матрицы C. Поскольку это конструирование предполагается выполнять с использованием ЭВМ, то построенные матрицы будут содержать погрешность, связанную с ограниченностью разрядной сетки ЭВМ. Отметим также, что представленная блок-схема представляет методический интерес, т.к. позволяет более четко понять общность, взаимосвязь и различие этих типов матриц, а также их свойства.

Технология конструирования матриц в унитарном пространстве мало отличается от конструирования в евклидовом пространстве. Роль произвольной ортогональной матрицы O_1 в унитарном пространстве будет играть унитарная матрица U_1, которую можно получить из симметрической матрицы S, воспользовавшись формулой Кэли (Ф.Р. Гантмахер, 1953) $U_1 = (I + iS)(I - iS)^{-1}$.

Ортогональные преобразования для получения эрмитовой, унитарной и нормальной матриц с заданным спектром идентичны и выполняются по формуле $A = U \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} U^{-1}$, но нужно помнить, что для получения унитарной матрицы следует учитывать расположение спектра $\{\lambda_i\}$ на окружности радиуса 1, у эрмитовой матрицы - спектр $\{\lambda_i\}$ действительный, а спектр нормальной матрицы произвольный комплексный. Таким образом последовательность конструирования матриц в унитарном пространстве укладывается в следующую блок-схему.

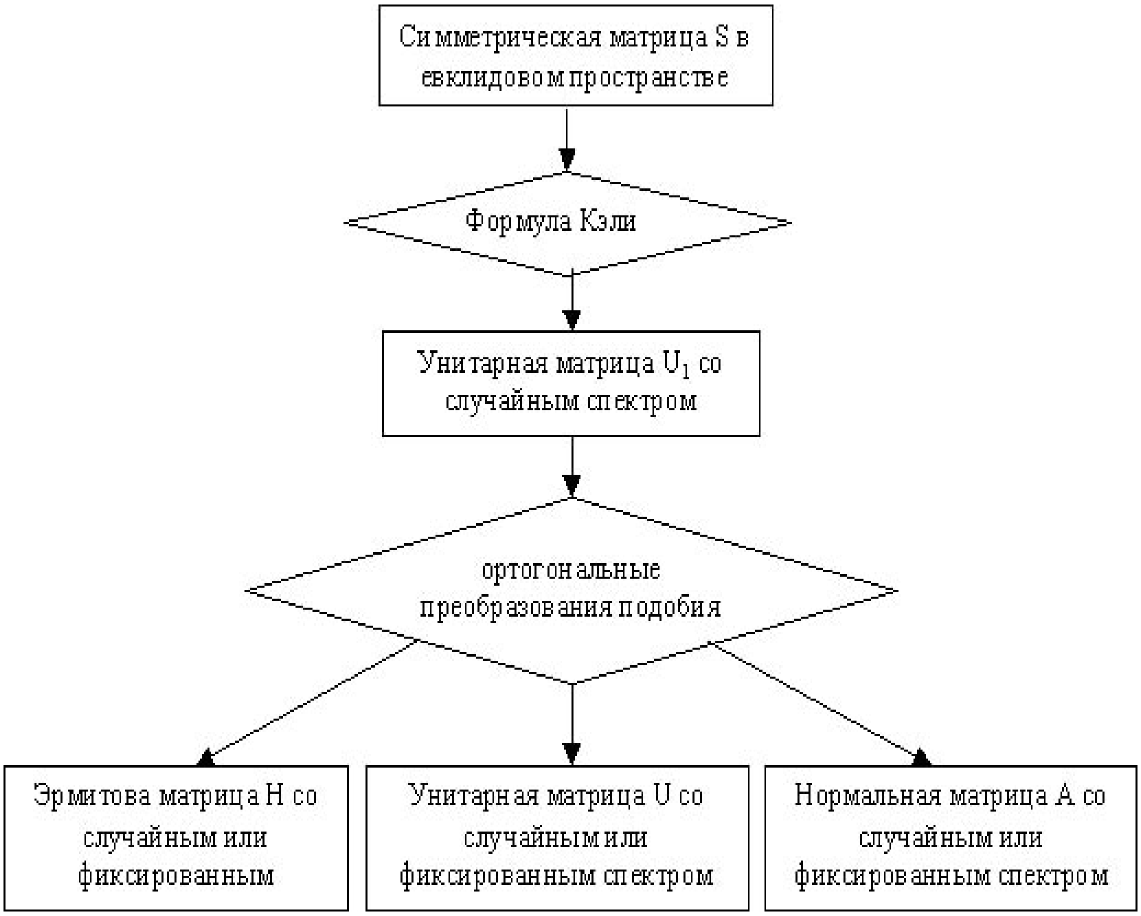


Рис. 8.

3. Некоторые итерационные методы, учитывающие информацию о спектре матричного оператора.

3.1. Метод полинома наилучшего равномерного приближения.

Рассматривается система линейных алгебраических уравнений

$$(aI - A)X = F, \tag{1}$$

где a - некоторое число, I - единичная, A - симметричная матрицы, X - искомый, а F - известный векторы.

В работе (В.Н. Кутрунов, 1992) был разработан итерационный процесс решения систем линейных алгебраических уравнений, использующий полином наилучшего равномерного приближения функции $\frac{1}{a-x}$ на интервале $x \in [m, M]$, где m,M - границы спектра оператора A на действительной оси. Итерационная форма записи этого полинома позволяет применить его для нахождения решения системы (1), которое записывается в виде

$$X = (aI - A)^{-1}F. \tag{2}$$

В тех случаях, когда точное решение уравнения может быть разложено по собственным функциям оператора A, итерационный процесс обеспечивает сходимость приближенного решения к точному равномерно по коэффициентам этого разложения. Любой другой итерационный процесс дает неравномерную и худшую для некоторых коэффициентов скорость сходимости. Ограничением метода служило предположение о действительности спектра матричного оператора. Предполагается, что матричный оператор симметричен.

Приближение обратной матрицы операторным полиномом $P_k(A)$ степени k приводит к приближенному решению

$$X_k = P_k(A)F. \tag{3}$$

Погрешность ε_k удовлетворяет неравенству

$$||\varepsilon_k|| = ||X - X_k|| \leq ||(aI - A)^{-1} - P_k(A)||||F||. \tag{4}$$

Норма симметричной матрицы $(aI - A)^{-1} - P_k(A)$ вычисляется в метрике $\mathbf{R}_n$ через спектр $S(A)$ матрицы A:

$$||(aI - A)^{-1} - P_k(A)|| = \max_{\lambda \in S(A)} |(a - \lambda)^{-1} - P_k(\lambda)|. \tag{5}$$

Наилучшую оценку $||\varepsilon_k||$ обеспечивает операторный полином $P_k(A)$, минимизирующий величину $\max|(a - \lambda)^{-1} - P_k(\lambda)|$ на спектре оператора A.

Попытаемся минимизировать погрешность (4) в случае неполной информации о спектре $S(A)$. Пусть m, M - оценки снизу и сверху границ спектра $S(A)$ и $a \notin [m, M]$. Из $S(A) \in [m, M]$ следует

$$\max_{\lambda \in S(A)} |(a - \lambda)^{-1} - P_k(\lambda)| \leq \max_{x \in [m,M]} |(a - x)^{-1} - P_k(x)|. \tag{6}$$

Обозначим $E_k(x) = (a - x)^{-1} - P_k(x)$. Тогда оценка погрешности $||\varepsilon_k||$ запишется

$$||\varepsilon_k|| = ||x - x_k|| \leq \max_{x \in [m,M]} |E_k(x)| \; ||F||. \tag{7}$$

Среди всех полиномов $P_k(x)$ наилучшую оценку (6) дает полином, минимизирующий величину $\max|E_k(x)|$ на интервале $[m, M]$. Следовательно, задача построения операторного полинома $P_k(A)$ сводится к нахождению полинома наилучшего равномерного приближения $P_k(x)$ функции $1/(a-x)$.

Теорема 3.1. *Полином наилучшего равномерного приближения* $P_k(x)$ *функции* $1/(a-x)$, $x \in [m, M]$, $a \notin [m, M]$ *удовлетворяет итерационному процессу*

$$\begin{aligned} P_0 &= (4/(M-m))((g+h)/(-h)^2), \\ P_1(x) &= (8/((M-m)(g-h)))(1/2 + y/(g-h)), \\ P_k(x) &= 4h/(M-m) + 2hyP_{k-1} - h^2 P_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots, \end{aligned} \tag{8}$$

$$h = b - sign(b)\sqrt{b^2-1}, g = 1/h,$$

$$b = (2a - M - m)/(M-m), y = (2x - M - m)/(M-m).$$

Погрешность $E_k(x)$ *удовлетворяет процессу*

$$E_k = 2hyE_{k-1} - h^2 E_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots, \tag{9}$$

$$\max_{x \in [m,M]} |E_k(x)| = \frac{8}{(M-m)} \; \frac{|h|^{k+2}}{(1-h^2)^2} = \frac{(M-m)h^k}{2(a-M)(a-m)}. \tag{10}$$

Если перенести результаты теоремы для аппроксимации функции $1/(a-x)$ на случай решения системы (1). Т.к. требуется найти приближенное решение X_k, то построение явное построение полинома $P_k(A)$ можно исключить.

Теорема 3.2. *Пусть* $S(A) \in [m, M]$ *и* $a \notin [m, M]$. *Тогда приближенное решение системы (1) получается из итерационного процесса*

$$\begin{aligned} X_0 &= (4/(M-m))((g+h)/(g-h)^2)F, \\ X_1 &= (8/((M-m)(g-h)))(1/2I + (1/(g-h))Y)F, \\ X_k &= 4hF/(M-m) + 2hY_{X_{k-1}} - h^2_{X_{kk-2}}, \quad k = 2, 3, \dots, \end{aligned} \tag{11}$$

$$Y = (2/(M-m))A - ((M+m)/(M-m))I,$$

с оценкой погрешности

$$||\varepsilon_k|| = ||X - X_k|| \le ((M-m)/(2(a-M)(a-m)))|h|^k||F||.$$

Замечание. Фиксированный выбор начальных приближений X_0, X_1 не мешает использовать в решении какое-либо хорошо угаданное приближение X^*. Для этого достаточно в системе (1 выполнить замену переменных $X = X^* + \alpha$. Задача сводится к решению систему

$$(aI - A)\alpha = F - (aI - A)X^* = F^*.$$

3.2. Метод полинома наилучшего равномерного приближения на комплексном спектре.

В §3.1 приложения был рассмотрен итерационный процесс решения систем линейных алгебраических уравнений, использующий полином наилучшего равномерного приближения функции $\frac{1}{a-x}$ на интервале $x \in [m, M]$, где m,M - границы спектра оператора A. Предполагалось, что матричный оператор симметричен и имеет действительный спектр.

Чтобы разработать метод, учитывающий комплексность спектра оператора A, необходим полином наилучшего равномерного приближения к функции $\frac{1}{a-z}$ на некоторой комплексной области, содержащей спектр оператора A. Проще всего реализовать задачу в предположении, что спектр расположен на круге $|z| \leq 1$, $a > 1$.

Полином наилучшего равномерного приближения к функции $\frac{1}{a-z}, |z| \leq 1, |a| > 1$ построен в 1959 году С.Я. Альпером (В.К. Дзядык, 1997).

Он имеет вид:

$$P_n(z) = \frac{1}{a-z} - \gamma_n \frac{(1-\overline{a}z)z^n}{a-z}, n = 0, 1, ...$$
$$\gamma_n = \frac{1}{a^n(1-|a|^2)};$$

Отсюда легко вычисляется погрешность аппроксимации:

$$\varepsilon(z) = 1/(a-z) - P_n(z).$$

Модуль этой погрешности на окружности $|z| = 1$ равен γ_n и эта величина оказывается наименьшей по сравнению с погрешностями, доставляемыми любыми другими аппроксимирующими полиномами (В.К. Дзядык, 1997).

Неявная форма записи полинома не позволяет заменить в нем величину z на оператор A и применять его непосредственно к решению операторного уравнения. По этой причине получим его итерационную форму. Непосредственно проверяется, что полиномы $P_n(z)$ и $P_{n-1}(z)$ связаны соотношением:

$$P_n = \frac{1}{a}\left(1 + zP_{n-1}\right), n = 1, 2...$$
$$P_0 = \frac{\overline{a}}{|a|^2 - 1}; |z| \leq 1, |a| > 1.$$

Параллельный перенос системы координат позволяет обобщить этот результат на круговую область радиуса M с центром в точке z_0. В этом случае полином наилучшего равномерного приближения для любого n получается из итерационного процесса:

$$P_0 = \frac{\overline{a} - \overline{z_0}}{|a - z_0|^2 - M^2},$$
$$P_n = \frac{1}{a - z_0}\left[1 + (z - z_0)P_{n-1}\right], n = 1, 2...$$
$$|z - z_0| \le M, |a - z_0| > M$$

Форма записи С.Я.Альпера приводит к погрешности аппроксимации в виде:

$$\frac{1}{a - z} - P_n\left(z\right) = \frac{M^2 - \left(\overline{a} - \overline{z_0}\right)\left(z - z_0\right)}{(a - z)(M^2 - |a - z_0|^2)}\left(\frac{z - z_0}{a - z_0}\right)^n.$$

Анализ погрешности показывает, что полином $P_n(z)$ сходится к функции $\frac{1}{a-z}$ для всех z, удовлетворяющих неравенству $\left|\frac{z-z_0}{a-z_0}\right| < 1$, т.е. в круге радиуса $|a - z_0|$ с центром в точке z_0. Наилучшая равномерная сходимость обеспечивается в круге $|z - z_0| \le M < |a - z_0|$.

Легко проверить, что в окружности $|z - z_0| = M$ модуль погрешности $\left|\frac{1}{a-z} - P_n(z)\right|$ оказывается одинаковым и наименьшим среди модулей, получаемых для других полиномов $P_n(z)$.

Как видно из анализа итерационного процесса, равномерная сходимость на круге $|z - z_0| = M$ обеспечивается исключительно выбором начального приближения, что не очевидно из записи полинома наилучшего приближения в форме С.Я. Альпера. Если развернуть итерационные процессы в явной форме, то устанавливается другой неочевидный результат: полином С.Я. Альпера, или полученный выше смещенный полином, только последним слагаемым отличаются от отрезка ряда Тейлора функции $1/(a-z)$ в точках $z = 0$ и $z = z_0$ соответственно и это последнее слагаемое обеспечивает равномерную сходимость.

Рассмотрим теперь решение матричного уравнения

$$(aI - A)X = F$$

. Пусть спектр оператора A расположен в круге $|z-z_0| \le M$ и $|a-z_0| > M$. Предполагаем, что уравнение имеет единственное решение, которое приблизительно находится по формуле $X_n = P_n(A)F$, или, учитывая итерационный процесс для $P_n(z)$ получим:

$$X_n = \frac{1}{a - z_0}\left[F + (z - z_0)P_{n-1}F\right],$$

т.е.

$$X_n = \frac{1}{a - z_0}\left[F + (z - z_0)X_{n-1}\right], n = 1, 2, ...$$

$$X_0 = \frac{\overline{a} - \overline{z_0}}{|a - z_0|^2 - M^2}F$$

Погрешность приближенного решения можно оценить:

$$|X - X_n| \le \left\|(aI - A)^{-1} - P_n(A)\right\| \|F\|.$$

Так как алгебраический полином $P_n(z)$ сходится к функции $\frac{1}{a-z}$ на спектре оператора, то, как известно (Ф.Р. Гантмахер, 1953), операторный полином $P_n(A)$ будет сходится к операторной функции $(aI - A)^{-1}$.

Если разложить обратный оператор $(aI - A)^{-1}$ в степенной ряд по степеням $(A - z_0 I)$, то можно показать, что

$$(aI - A)^{-1} - P_n(A) = \left(\frac{A - z_0 I}{a - z_0}\right)^n \left[(aI - A)^{-1} - \frac{\overline{a} - \overline{z}_0}{(a - z_0)^2 - M^2}I\right]$$

Для оценки этой разности по норме предположим, что A - простая матрица размерности n и $\mu_1 ... \mu_n$ - ее собственные числа, тогда у матрицы $(aI - A)^{-1}$ имеется n различных собственных чисел $\left\{\frac{1}{a-\mu_i}\right\}$. Следовательно матрица $(aI - A)^{-1}$ - простая. Пусть $U = diag\{(aI - A)^{-1}\}$, тогда существует неособенная матрица S, такая, что $(aI - A)^{-1} = SVS^{-1}$. Так как $SS^{-1} = I$, то можно записать

$$\frac{\overline{a} - \overline{z}_0}{(a - z_0)^2 - M^2}I = S\frac{\overline{a} - \overline{z}_0}{(a - z_0)^2 - M^2}IS^{-1}$$

После подстановки найдем:

$$\left\|(aI - A)^{-1} - P_n(A)\right\| \le \left\|\frac{A - z_0 I}{a - z_0}\right\|^n \left\|S\left(V - \frac{\overline{a} - \overline{z}_0}{(a - z_0)^2 - M^2}\right)S^{-1}\right\| \le$$

$$\le \left\|\frac{A - z_0 I}{a - z_0}\right\|^n \max_{\mu_i}\left|\frac{1}{a - \mu_i} - \frac{\overline{a} - \overline{z}_0}{(a - z_0)^2 - M^2}\right|.$$

Из оценки следует, что решение X_n сходится к точному решению как геометрическая прогрессия со знаменателем $\left\|\frac{A - z_0 I}{a - z_0}\right\|$. Если разложить приближенное решение в ряд по собственным функциям оператора A, то поведение коэффициентов разложения в процессе итерирования различно.

Пусть некоторые собственные числа расположены на окружности $|z - z_0| = M$ с центром в точке z_0, точнее коэффициенты разложения, соответствующие этим числам, будут сходиться к точным значениям равномерно.

Коэффициенты, соответствующие собственным числам, находящиеся в окружности $|z - z_0| < M$ сходятся к точным значениям значительно быстрее, а на окружности $|z - z_0| > M$ медленнее, чем соответственные собственные числа на окружности $|z - z_0| = M$. Эта сходимость будет неравномерной.

Анализ полученной численной схемы приводит еще и к следующему выводу: итерационный процесс решения систем алгебраических уравнений оказывается известным методом простой итерации, но применение полинома наилучшего приближения привело к появлению в нем двух параметров: z_0 - центр спектра оператора A, и M- максимальное удаление точек спектра от центра. Если удастся с некоторой точностью указать эти два параметра, то задание начального приближения по соответствующей формуле обеспечивает наиболее эффективную работу итерационного процесса. Эти утверждения проверены численно на тестовом примере.

В уравнении $(aI - A)X = F$ число a было задано равным 10, матрица A конструировалась при помощи преобразования подобия по формуле $A = B^{-1}SB$, где B квадратная матрица двадцать первого порядка, заполненная случайными числами. У матрицы S на главной диагонали задавались собственные числа матрицы A по формуле $s_{jj} = 5 + 5i + M \cdot e^i$, где i - мнимая единица и аргумент менялся от 0 до 2π с шагом $\pi/10$. Следовательно матрица A комплексная, ее спектр расположен на комплексной плоскости на окружности радиуса M с центром в точке $z_1 = 5 + 5i$. Проводились следующие численные эксперименты:

1. В общем случае центр спектра не известен, поэтому в итерационном процесса брали $z_0 = 0$. Число M менялось от 0 до величины, при которой возникала расходимость. Изменению этого числа соответствует изменение радиуса окружности расположения спектра. Так как для $z_0 = 0$ итерационный процесс расходится, когда хотя бы одно число спектра окажется вне круга сходимости метода простой итерации. В данном случае круг сходимости имеет радиус $a = 10$.

2. Так как в тестовом примере центр спектра z_1 известен, то это значение использовалось для повторного счета. На рис. 9 изображены два графика, показывающие изменение числа итераций (вертикальная ось) в зависимости от изменения радиуса окружности (горизонтальная ось), на которой располагается спектр оператора A. Верхний график соответствует итерационному процессу с параметром $z_0 = 0$,

а нижний график с параметром $z_1 = 5 + 5 * i$. Как и следовало ожидать, во втором случае сходимость на несколько порядков лучше, чем в первом случае. Заметим также, что за начальное приближение выбиралась правая часть системы алгебраических уравнений. Аналогичные эксперименты проводились для начального приближения $X_0 = \frac{\overline{a}-\overline{z_0}}{|a-z_0|^2-M^2}F$. Это начальное приближение соответствует выбору итерационного процесса сходящегося равномерно на комплексном спектре оператора A. Рис. 10 аналогичен рис. 9 и отличается выбором начального приближения. Из сравнения рис. 9 и рис. 10 видно, что выбор начального приближения, подсказанный полиномом С.Я. Альпера, оказывается существенным при плохой сходимости. В данном примере это соответствует расположению спектра на окружности радиуса примерно равного 3. На рис. 11 изображены два графика, соот-

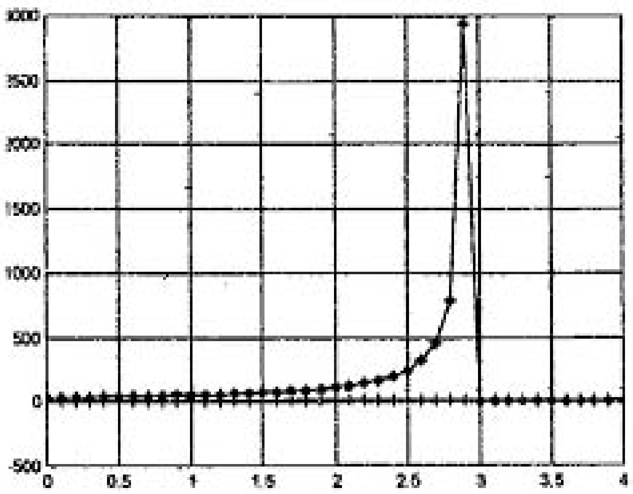
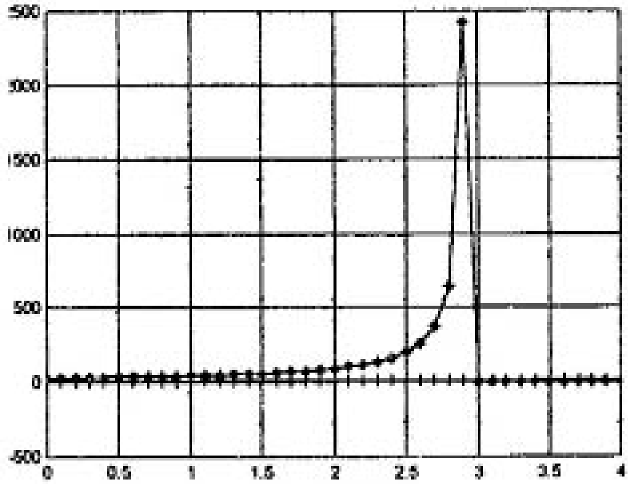


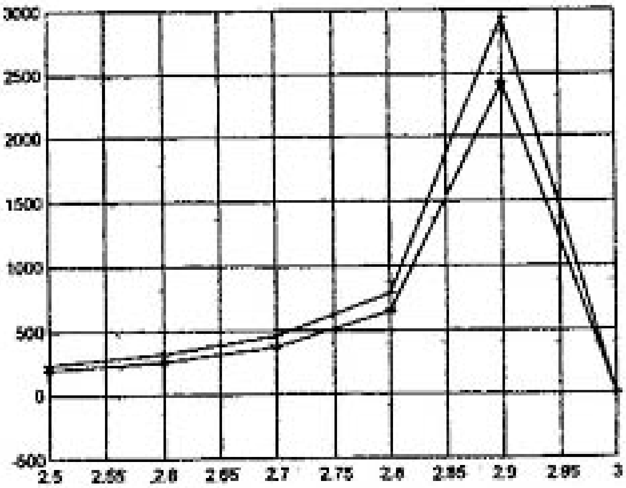
Рис. 9.

ветствующие параметру $z_0 = 0$ и различным начальным приближениям. Нижний график соответствует выбору начального приближения в форме $X_0 = \frac{\overline{a}-\overline{z_0}}{|a-z_0|^2-M^2}f$, а верхний в виде правой части системы алгебраических уравнений. Из графиков видно, что правильный выбор начального приближения оказывается существенным при плохой сходимости.



500
000
1500
1000
500
0
-500
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Рис. 10.



3000
2500
2000
1500
1000
500
0
-500
2.5
2.55
2.6
2.65
2.7
2.75
2.8
2.85
2.9
2.95
3

Рис. 11.

Сведения о внедрении теоретических разработок и фрагментов программ.

Программный комплекс `surfit` является свободно распространяемым пакетом и доступен через интернет по адресу `http:\\surfit.sourceforge.net`.

АВТОРСКИЙ ЭКЗЕМПЛЯР

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

РОССИЙСКОЕ АГЕНТСТВО ПО ПАТЕНТАМ И ТОВАРНЫМ ЗНАКАМ (РОСПАТЕНТ)

СВИДЕТЕЛЬСТВО

Об официальной регистрации программы для ЭВМ

№ 2002610737

На основании Закона Российской Федерации “О правовой охране программ для электронных вычислительных машин и баз данных”, введенного в действие 20 октября 1992 года, Российским агентством по патентам и товарным знакам выдано настоящее свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ

Баспро ГДИ

Правообладатель(ли):

Закрытое акционерное общество “Информационная компания” (RU)

Автор(ы):

Медведев Евгений Анатольевич, Володин Александр Николаевич, Смирнов Антон Викторович, Дмитриевский Михаил Владимирович (RU)

Страна: Российская Федерация

по заявке № 2002610617, дата поступления: 18 апреля 2002 г.

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ

г. Москва, ***17 мая 2002 г.***

Генеральный директор

А.Д. Корчагин

АВТОРСКИЙ ЭКЗЕМПЛЯР

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

РОССИЙСКОЕ АГЕНТСТВО ПО ПАТЕНТАМ И ТОВАРНЫМ ЗНАКАМ (РОСПАТЕНТ)

СВИДЕТЕЛЬСТВО

Об официальной регистрации программы для ЭВМ

№ 2002610736

На основании Закона Российской Федерации “О правовой охране программ для электронных вычислительных машин и баз данных”, введенного в действие 20 октября 1992 года, Российским агентством по патентам и товарным знакам выдано настоящее свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ

Баспро 2002

Правообладатель(ли):

Закрытое акционерное общество “Информационная компания” (RU)

Автор(ы):

Смирнов Антон Викторович, Нестеров Денис Владимирович, Дмитриевский Михаил Владимирович, Медведев Евгений Анатольевич (RU)

Страна: Российская Федерация

по заявке № 2002610616, дата поступления: 18 апреля 2002 г.

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ

г. Москва, ***17 мая 2002 г.***

Генеральный директор

А.Д. Корчагин

АВТОРСКИЙ ЭКЗЕМПЛЯР

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

РОССИЙСКОЕ АГЕНТСТВО ПО ПАТЕНТАМ И ТОВАРНЫМ ЗНАКАМ (РОСПАТЕНТ)

СВИДЕТЕЛЬСТВО

Об официальной регистрации программы для ЭВМ

№ 2002610734

На основании Закона Российской Федерации "О правовой охране программ для электронных вычислительных машин и баз данных", введенного в действие 20 октября 1992 года, Российским агентством по патентам и товарным знакам выдано настоящее свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ

Баспро Редактор 3Д

Правообладатель(ли):

Закрытое акционерное общество "Информационная компания" (RU)

Автор(ы):

Сидоров Александр Витальевич, Сергеева Надежда Сергеевна, Дмитриевский Михаил Владимирович, Медведев Евгений Анатольевич (RU)

Страна: Российская Федерация

по заявке № 2002610614, дата поступления: 18 апреля 2002 г.

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ

г. Москва, ***17 мая 2002 г.***

Генеральный директор

А.Д. Корчагин

АВТОРСКИЙ ЭКЗЕМПЛЯР

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

РОССИЙСКОЕ АГЕНТСТВО ПО ПАТЕНТАМ И ТОВАРНЫМ ЗНАКАМ (РОСПАТЕНТ)

СВИДЕТЕЛЬСТВО

Об официальной регистрации программы для ЭВМ

№ 2002610740

На основании Закона Российской Федерации "О правовой охране программ для электронных вычислительных машин и баз данных", введенного в действие 20 октября 1992 года, Российским агентством по патентам и товарным знакам выдано настоящее свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ

Баспро Редактор 2Д

Правообладатель(ли):

Закрытое акционерное общество "Информационная компания" (RU)

Автор(ы):

Сидоров Александр Витальевич, Дмитриевский Михаил Владимирович, Медведев Евгений Анатольевич (RU)

Страна: Российская Федерация

по заявке № 2002610620, дата поступления: 18 апреля 2002 г.

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ

г. Москва, ***17 мая 2002 г.***

Генеральный директор

А.Д. Корчагин

Заключение.

1. Разработан и реализован метод гридинга, названный методом последовательной минимизации функционалов (ПМФ). Полученная реализация метода обладает большим запасом по производительности, что позволяет строить карты на избыточных по количеству узлов гридах.

2. Реализованы и применены алгоритмы вейвлет-анализа для обработки высокодетальных карт геолого-геофизических параметров.

3. Совместное использование метода ПМФ и техники вейвлет-анализа порождает новый подход к построению и визуализации геолого-геофизических карт. Карты строятся на умеренно избыточной сетке, и, применяя вейвлет-анализ, визуализируются с различными уровнями детальности. Дополнительно появляется возможность уменьшения влияния погрешностей, содержащихся в исходных геолого-геофизических данных. Избыточность карт в предлагаемой схеме легко достижима и рассматривается как положительное явление.

4. Построен новый метод гридинга : аналог метода крайгинга без статистического обоснования, обладающий более высокой производительностью по сравнению с методом крайгинга.

5. Разработаны оригинальные итерационные алгоритмы решения СЛУ, учитывающие априорно-известную информацию о спектре и структуре матричного оператора.

Благодарность.

Автор выражает глубокую признательность и сердечную благодарность научному руководителю Кутрунову Владимиру Николаевичу за познавательное и интересное сотрудничество.

Литература

1. Дж. Альберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир. 1972.

2. М.Ш. Бирман, Н.Я. Виленкин, Е.А. Горин. Функциональный анализ, изд. 2, перераб. и доп. Справочная математическая библиотека. М.:Наука, Главная редакция физико-математической литературы. 1972.

3. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы: Учеб. пособие. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987.

4. Д.А. Родионов, Р.И. Коган, В.А. Голубева. Справочник по математических методам в геологии. М.: Недра. 1987.

5. Л.Г. Белиовская, Н.А. Богомолов, А.Д. Ковалев. Обработка карт изолиний двумерных функций. // Вычислительные методы и программирование. 2000. Т.1. стр. 15-23.

6. В.Н. Кутрунов, В.Н. Пьянков, М.В. Дмитриевский. Каскадные алгоритмы обработки геофизической информации. // Вестник Тюменского государственного университета N2. 2001. стр. 190–197.

7. Э. Столниц, Т. ДеРоуз, Д. Салезин. Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2002.

8. А.Г. Плавник, А.Н Сидоров, М.С. Шутов. Задача построения карт с точки зрения метода конечных элементов http://www.geospline.com/information/stat/stat1.pdf. 2002.

9. В.Н. Пьянков, В.Н. Кутрунов, М.В. Дмитриевский. Схемы решения аппроксимационных задач при задании граничных условий на кривых. // Математическое и информационное моделирование. Сборник научных трудов. Вып. 4. Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета. 2002. стр. 7–16.

10. С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука. 1976.

11. В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. Матрицы и вычисления. Справочная математическая библиотека. М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984.

12. А. Джордж, Дж. Лю. Численное решение больших разреженных систем уравнений: Пер. с англ. М.:Мир. 1984.

13. Л. Хейгеман, Д. Янг. Прикладные итерационные методы: Пер. с англ. М.:Мир. 1986.

14. М.И. Игнатов, А.Б. Певный. Сплайн-аппроксимация плавных поверхностей. Препринт Коми филиала АН СССР. Серия "Научные доклады", N49. Сыктывкар: Коми филиал АН СССР. 1986.

15. М.В. Дмитриевский, В.Н. Кутрунов. Операторный полином наилучшего равномерного приближения на комплексном спектре. // Материалы XXXVII Международной студенческой коференции "Студент и научно-технический прогресс" : Математика, /Новосиб. ун-т/. 1998. стр. 39–41.

16. В. Воробьев, В. Грибунин. Теория и практика вейвлет-преобразования. С.-Пб.: Издательство ВУС. 1999.

17. Дж. Голуб, Ч.Ван Лоун. Матричные вычисления: Пер. с англ. М.:Мир. 1999.

18. В.Н. Кутрунов, М.В. Дмитриевский. Метод блуждания по спектру решения операторных уравнений. // Моделирование технологических процессов нефтедобычи. Сборник научных трудов. Тюмень: Издательство "Вектор-Бук". 1999. стр. 157–163.

19. В.Н. Кутрунов, М.В. Дмитриевский. Метод операторного полинома наилучшего равномерного приближения решения матричных уравнений. // Вестник Тюменского государственного университета N3. 1999. стр. 149–154.

20. В.Н. Кутрунов, М.В. Дмитриевский. Спектр матричных операторов и его использование в итерационных процессах. // Математическое и информационное моделирование: Сборник статей. Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета. 2000. стр. 3–11.

21. В.Н. Кутрунов, М.В. Дмитриевский. Аналог интерполяционного метода крайгинга. // Труды Четвертой международной научно-технической конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов" (10-12 декабря 2001 г., г. Ульяновск), под редакцией проф. Полянскова. Ульяновск: УлГУ. 2001. стр. 80–82.

22. В.Н. Кутрунов, М.В. Дмитриевский. Аналог интерполяционного метода крайгинга. // Вестник Тюменского государственного университета N2. 2001. стр. 208–215.

23. Д. Роджерс, Дж. Адамс. Математические основы машинной графики: Пер. с англ. М.:Мир. 2001.

24. В.Н. Пьянков, М.В. Дмитриевский. Универсальная конструкция функционала в задачах аппроксимации полей параметров. // Вторая Всероссийская научная конференция "Геология и нефтегазоносность Западно-Сибирского мегабассейна": Материалы докладов. Часть 4. Тюмень: Издательство "Вектор-Бук". 2002. стр. 80–82.

25. В.Н. Пьянков, М.В. Дмитриевский. Построение математических моделей месторождений с использованием методов регуляризации. // Моделирование технологических процессов нефтедобычи. Выпуск третий, часть 1. Тюмень: Издательство "Вектор-Бук". 2002. стр. 74–80.

26. М.В. Дмитриевский, В.Н. Кутрунов. Каскадный алгоритм построения геофизических полей параметров сплайн-функциями. // НАУКА. ТЕХНИКА. ИННОВАЦИИ. Региональная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых: Тез. докл. в 5-ти частях. Часть 1. Новосибирск: Изд-во НГТУ. 2002. стр. 47–48.

27. В.Н. Пьянков, М.В. Дмитриевский. Один способ учета данных различной информационной значимости в задачах построения интерполяционных и аппроксимационных сплайнов на подпространствах. // Нефть и газ: проблемы недропользования, добычи и транспортировки: Материалы научно-технической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения В.И. Муравленко. Тюмень: ТюмГНГУ. 2002. стр. 5–7.

28. В.Н. Кутрунов, М.В. Дмитриевский. Быстрые алгоритмы построения и преобразования карт геологических параметров. // Математическое

и информационное методелирование: сборник научных трудов. Вып. 5. Тюмень: Издательство «Вектор Бук». 2003. стр. 3–19.

29. М.В. Дмитриевский, В.Н. Кутрунов. Алгоритм быстрого построения карт геологических параметров с учетом данных различной природы. // Труды Пятой Международной конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов" (16-18 июня 2003 г., г. Ульяновск) / Под ред. проф. д.т.н. Ю.В. Полянскова, д.ф.-м.н. В.Л.Леонтьева. Ульяновск: УлГУ. 2003. стр. 68–69.

30. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц. М.:Гостехиздат. 1953.

31. Ж. Матерон. Основы прикладной геостатистики. М.: Мир. 1968.

32. С.Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. М.:Наука, Главная редакция физико-математической литературы. 1970.

33. Райнш Уилкинсон. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М.,"Машиностроение". 1976.

34. М. Давид. Геостатистические методы при оценке запасов руд. Л.: Недра. 1980.

35. В.А. Василенко. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука. 1983.

36. С. Пашковский. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.:Наука. 1983.

37. В.А. Василенко. Вариационые задачи и численные методы в теории приближения функций. Диссертация д.ф.-м.н. Академия наук СССР, Сибирское отделение, Вычислительный центр. 1986.

38. А.М. Волков. Геологическое картирование нефтегазоносных территорий с помощью ЭВМ. М.: Недра. 1988.

39. В.И. Аронов. Методы восстановления геолого-геофизических полей - сходство, особенности, проблемы. // Геофизический журнал. 1988. 10(3). стр. 3–12.

40. Г.И. Марчук. Методы вычслительной математики: Учеб. пособие.- 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1989.

41. В.И. Аронов. Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризация залежей нефти и газа на ЭВМ. М.:Недра. 1990.

42. О.В. Матвеев. Интерполирование D^m сплайнами на хаотических сетках. Диссертация д.ф.-м.н. РАН, Уральское отделение, Институт Математики и Механики. 1994.

43. В.К. Дзядык. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.:Наука. 1997.

44. А.П. Петухов. Введение в теорию базисов всплесков. СПб: Издательство СпбТУ. 1999.

45. В.О. Ашкеназы. Сплайн-поверхности и аппроксимационный поиск экстремума. Применение функционального анализа в теории приближений, стр. 19–30. Тверь: ТвГУ, 1999.

46. Л.В. Новиков. Основы вейвлет-анализа сигналов. Учебное пособие. ООО "Модус+", Санкт-Петербург. 1999.

47. А.А. Питенко. Нейросетевой анализ в геоинформационных системах. Автореферат диссертации к.т.н. Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск. 2000.

48. М.В. Березовский. Сглаживающие изогеометрические и робастные сплайны: методы и алгоритмы. Автореферат диссертации к.ф.-м.н. Новосибирский Государственный архитектурно-строительный университет. 2000.

49. С.В. Горбачев. Разработка интерпретационной картографической системы "ИНФОРМГЕО" для прогноза нефтеносности месторождений. Автореферат диссертации к.т.н. Томский государственный университет. 2000.

50. Л.В. Гилева. Каскадные итерационные алгоритмы в методе конечных элементов для эллиптических краевых задач. Автореферат диссертации к.ф.-м.н. Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск. 2000.

51. С.Ю. Катеринина. Развитие и применение метода сплайн-аппроксимации в задачах численного расчета стержней и пластинок с разрывными параметрами. Автореферат диссертации к.т.н. Волгоградская государственная Архитектурно-строительная академия. 2000.

52. В.И. Лебедев. Функциональный анализ и вычислительная математика: Учебное пособе. - 4-е издание, перераб. и доп. М.:ФИЗМАТЛИТ. 2000.

53. И. Добеши. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2001.

54. А.Б. Переберин. Построение изолиний с автоматическим масштабированием. // Вычислительные методы и программирование. 2001. Т.2. стр. 22-32.

55. В.О. Ашкеназы. Сплайн-поверхности (дополнительные главы): Учебное пособие. Тверь: Тверской гос. ун-т. 2001.

56. А.Л. Фукс. Разработка и исследование алгоритмов интерполяции однозначных поверхностей и их использование при построении цифровых моделей рельефа. Диссертация к.ф.-м.н. Томский государственный университет. 2001.

57. А.Б. Шитов. Разработка численных методов и программ, связанных с применением вейвлет-анализа для моделирования и обработки экспериментальных данных. Диссертация к.ф.-м.н. Ивановский государственный университет. 2001.

58. Э. Эйнджел. Интерактивная компьютерная графика. Вводный курс на базе OpenGL, 2 изд.: Пер. с англ. М.:Издательский дом "Вильямс". 2001.

59. А.В. Переберин. Многомасштабные методы синтеза и анализа изображений. Диссертация к.ф.-м.н. РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша. 2002.

60. М.В. Дмитриевский. Условие несмещенности при восстановлении полей геофизических параметров. // Материалы Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам "Ломоносов 2002". Секция "Вычислительная математика и кибернетика". Изд. "МАКСПРЕСС". 2002. стр. 8.

61. Ю.Л. Костюк. Эффективные алгоритмы обработки и отображения графических данных и их реализация в программных комплексах. Автореферат диссертации д.ф.-м.н. Томский государственный университет. 2002.

62. Н.Д. Дикусар. Методы 4-точечных преобразований в задачах аппроксимации и сглаживания кривых и поверхностей. Автореферат диссертации д.ф.-м.н. Объединенный институт ядерных исследований, Дубна. 2002.

63. В.Н. Кутрунов. Полином наилучшего равномерного приближения в итерационном методе решения систем алгебраических уравнений. // Сибирский математический журнал. 1992. Т.33. стр. 62–68.

64. B.K. Bhattacharyya. Bicubic spline interpolation as a method for treatment of potential field data. // Geophysics. 1969. 34(3). стр. 402–423.

65. I. Briggs. Machine contouring using minimum curvature. // Geophysics. 1974. 39(1). стр. 39–48.

66. R. Franke. Scattered data interpolation: tests of some methods. // Math. Comput. 1982. V.38, N 157. стр. 181–200.

67. G. Franklin, Horowitz, Peter Hornby, Don Bone, Maurice Craig. Fast multidimensional interpolatons. // R.V. Ramani, редактор, 26th Proceedings of the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM 26), Littleton, Colorado, U.S.A Soc. Mining, Metall., and Explor. (SME). 1996. стр. 53–56.

68. Michael B. Gousie, Wm. Randolph Franklin. Converting elevation contours to a grid. citeseer.nj.nec.com/336933.html, 2000.

69. G.S. Kimeldorf, G. Wahba. A correspondence between bayesian estimation on stochastic processes and smoothing by splines. // The Annals of Mathematical Statistics. 1970. 41. стр. 495–502.

70. Helena Mitasova, Lubos Mitas. Interpolation by regularized spline with tension: I. theory and implementation. // Mathematical Geology. 1993. 25(6). стр. 641–655.

71. J.J. Royer, P.C. Vieira. Dual formalism of kriging. G. Verly, M. David, A.G. Journel, A. Marechal, editors, Geostatistics for Natural Resources

Characterization, Part 2. NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences, Vol. 122, pp 691702, D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, 1984.

72. K.E. Kerry, K.A. Hawick. Kriging interpolation on high-perfomance computers. Technical report, Department of Computer Science, University of Adelaide, SA 5005, Australia, 1998.

73. S. Lee, G. Wolberg, S. Y. Shin. Scattered data interpolation with multilevel B-splines. // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. /1997. 3(3). стр. 228–244.

74. M. Floater, A. Iske. Multistep scattered data interpolation using compactly supported radial basis functions. // J. Comput. Applied Math. 1996. 73. стр. 65–78.

75. M. Hegland, S. Roberts, I. Altas. Tr-cs-97-20, finite element thin plate splines for surface fitting. Technical report, The Australian National University, 1997.

76. M. Hegland, S. Roberts, I. Altas. // Finite element thin plate splines for data mining applications 1998. стр. 1–9.

77. P. Wessel, D. Bercovici. Interpolation with splines in tension: A green's function approach. // Mathematical Geology. 1988. 30(1). стр. 77–93.

78. S. Pruess. Shape preserving c2 cubic spline interpolation. // IMA Journal of Numerical Analysis. 1993. 13. стр. 493–507.

79. R. Schaback, H. Wendland. Adaptive greedy techniques for approximate solution of large rbf systems. // Numerical Algorithms. 2000. 24. стр. 239–254.

80. R. Shaback, H. Wendland. Characterization and construction of radial basis functions. N. Dyn D. , Leviatan, D. Levin, A.Pinkus, editors, Multivariate Approximation and Applications, стр. 1–24. Cambridge University Press, 2001.

81. M. Rauth. Application of 2d methods for scattered data approximation to geophysical data sets. // Proc. Conf. SampTA-95, Riga/Latvia 1995.

82. M. Rauth. Gridding of Geophysical Potential Fields from Noisy Scattered Data PhD thesis. University of Vienna. May 1998.

83. R.K. Beatson, E. Chacko. Fast evalution of radial basis functions: A multivariate momentary evalution scheme. A. Cohen, C. Rabut, L.L. Schumaker, editors, Curve and Surface Fitting, стр. 37–46. Saint Maolo 1999, Vanderbilt University Press, 2000.

84. R.K. Beatson, G.N. Newsam. Fast evaluation of radial basis functions. // Computer Math. Applic. 1992. 24. стр. 7–19.

85. David T. Sandwell. Biharmonic spline interpolation of geos-3 and seasat altimeter data. // Geophysical Research Letters. 1987. 4(2). стр. 139–142.

86. R. Schaback. Creating surfaces from scattered data using radial basis functions. // Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design III. 1995. стр. 477–496.

87. R. Schaback. Stability of radial basis function interpolants. // Approximation Theory X: Wavelets, Splines, and Applications. 2002. стр. 433–440.

88. D. Shepard. A two dimensional interpolation function for irregularly spaced data. // Proceedings of the 23rd National Conferenece, New York. ACM. 1968. стр. 517–523.

89. C.J. Swain. A fortran iv program for interpolating irregularly spaced data using the difference equations for minimum curvature. // Computers and Geosciences. 1976. (1). стр. 231–240.

90. Wei-Pai Tang, Wing Lok Wan. Sparse approximate inverse smoother for multigrid. // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2000. 21(4). стр. 1236–1252.

91. W. L. Wan, Tony F. Chan, Barry Smith. An energy-minimizing interpolation for robust multigrid methods. // SIAM Journal on Scientific Computing. 2000. 21(4). стр. 1632–1649.

92. W.H.F. Smith, P. Wessel. Gridding with continuous curvature splines in tension. // Geophysics. 1990. 55(3). стр. 293–305.